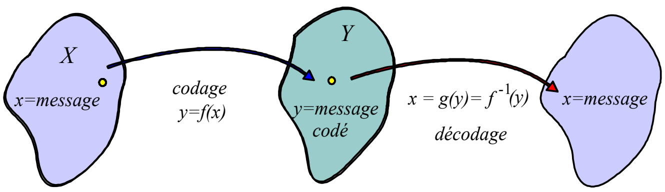
Fonctions réciproques



B. Aoubiza
IUT Belfort-Montbéliard
Département GTR

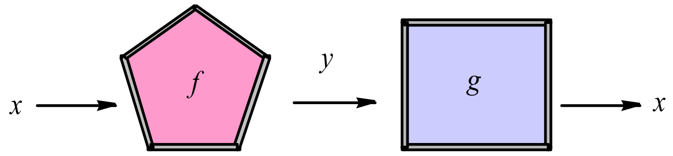
6 janvier 2003

Table des matières

11.1 Fonctions réciproques

11.1.1 Fonction réciproque — Définition

Il arrive souvent que, pour une fonction donnée f, on a besoin (si c'est possible) d'une autre fonction g telle que :

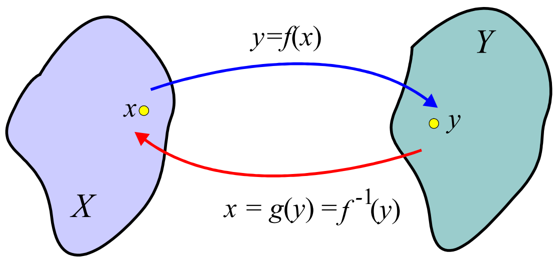


Dèfinition 1 ***(Fonctions réciproque)*** *Si f est une application de X dans Y et g est une application de Y dans X telles que*

- $f(g(y)) = y$ *pour tout* $y \in Y$
- $g(f(x)) = x$ *pour tout* $x \in X$

on dit que f est la fonction réciproque *de g, et que g est la fonction* réciproque *de f.*

Notation 1 *La fonction réciproque de f se note f^{-1}.*



Exemple 1 *Soient f et g les deux fonctions définies par*

$$f: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & [0,+\infty[\\ y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

Ces deux fonctions vérifient les relations suivantes :

- $f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ *pour tout* $y \in [0,+\infty[$
- $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ *pour tout* $x \in [0,+\infty[$

Donc f est la fonction réciproque *de g, et g est la fonction* réciproque *de f.*

Dèfinition 2 ***(Fonction Bijective)*** *une fonction f est* bijective *sur un domaine (intervalle) si chaque fois que $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.*

Remarque 1 *Rappelons que toute fonction bijective admet une fonction réciproque.*

Exemple 2 *Montrer que la fonction $f(x) = x^3$ est bijective.*
Solution : *Montrons que si $f(x_1) = f(x_2)$ alors $x_1 = x_2$.*

Soient x_1 et x_2 deux réels quelconques tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On a

$$x_1^3 = x_2^3 \quad \text{et donc } x_1^3 - x_2^3 = 0$$

or

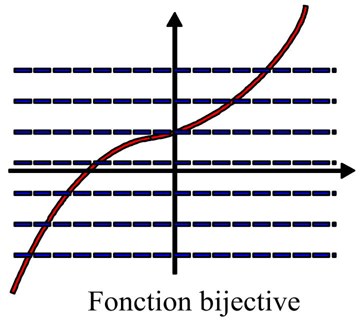
$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 0$$

Le produit est nul si l'un des facteurs est nul. On déduit donc que $x_1 = x_2$ car $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ ne peut pas être nul dans $\mathbb{R}$. (dire pourquoi ?)

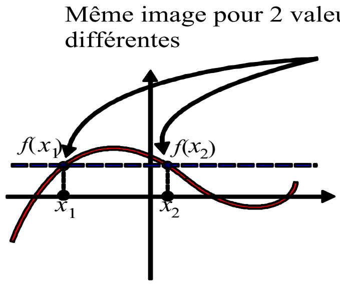
Exemple 3 *La fonction $f(x) = x^2$ définie pour tout réel x, n'est pas bijective car $f(1) = f(-1)$ mais $1 \neq -1$.*

Test de la droite horizontale

Une fonction f est *bijective* si et seulement si toute droite horizontale ne peut rencontrer C_f qu'au plus en un point.



Fonction bijective



Fonction non bijective

11.1.2 Fonction réciproque — Domaine et domaine image

On déduit facilement les relations suivantes entre le **domaine image** et le **domaine** de définition :

$$\begin{aligned} \text{domaine de } f^{-1} &= \text{domaine image de } f \\ \text{domaine image de } f^{-1} &= \text{domaine de } f \end{aligned}$$

11.1.3 Fonction réciproque — Détermination de la fonction réciproque

Pour déterminer la fonction réciproque de $y = f(x)$:

1. Résoudre l'équation $y = f(x)$ où l'inconnue est x, on obtient alors $x = g(y)$.
2. Remplacer y par x et x par y dans l'expression $x = g(y)$ pour obtenir

$$y = g(x) = f^{-1}(x)$$

Exemple 4 *Soit $f(x) = x^2$ pour $x > 0$. Déterminer sa fonction réciproque.*
Solution *: On résout l'équation*

$$y = x^2, \qquad x > 0$$

où l'inconnue est x, on obtient

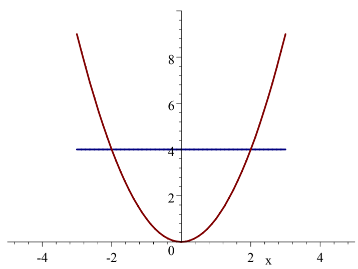
$$x = \sqrt{y}, \qquad y > 0$$

Maintenant on remplace y par x et x par y on obtient

$$y = \sqrt{x}, \qquad x > 0$$

Ainsi, la fonction réciproque $f^{-1}(x)$ de $f(x) = x^2$, pour $x > 0$, est la fonction racine carrée : $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Point de vue graphique. Si on regarde le graphe de $y = x^2$, pour tout x, on voit que cette fonction ne peut pas avoir de réciproque pour tout x.



$y = x^2$

Noter que la droite horizontale $y = 4$ coupe la courbe de $y = x^2$ en deux points. Ce qui signifie que la fonction n'est pas bijective et donc elle n'admet pas de fonction réciproque.

11.1.4 Fonction réciproque — Propriété de continuité

Théorème 1 *Si f est une fonction bijective continue sur un intervalle, alors sa fonction réciproque f^{-1} est aussi continue.*

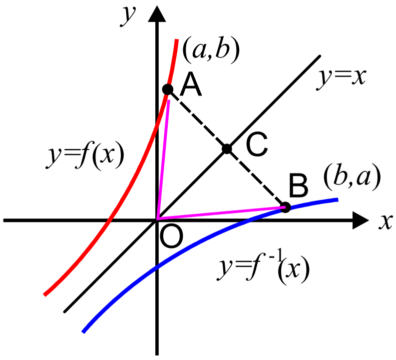
11.1.5 Fonction réciproque — Graphe

Théorème 2 *Les courbes des fonctions f et de sa réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.*

Preuve. La pente de droite passant par les pointes (a, b) et (b, a) est donnée par

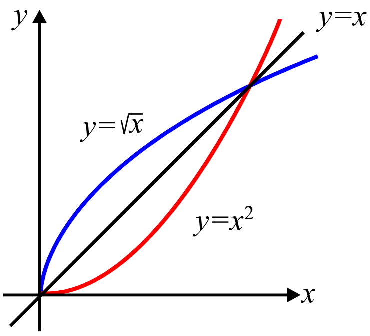
$$\frac{a-b}{b-a} = -1$$

Ce qui signifie que cette droite est orthogonale à la droite $y = x$ de pente 1. En utilisant des arguments géométriques : $(\widehat{OA, Oy}) = (\widehat{OB, Ox})$ est donc les triangles OAC et OBC sont "semblables", on déduit que $AC = BC$.



Ce qui signifie que B est le symétrique de A par rapport à la première bissectrice $y = x$. ■

Exemple 5 *Les graphes des fonctions x^2 , $\sqrt{x}$, et x .*



Courbes de x^2 , x , et $\sqrt{x}$

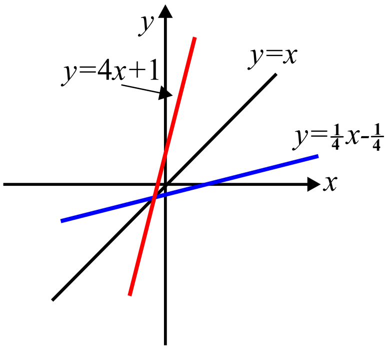
Exemple 6 *Déterminer la fonction réciproque de $y = 4x + 1$ et tracer son graphe.*
Solution : *Résolvons l'équation $y = 4x + 1$ où l'inconnue est x :*

$$y = 4x + 1$$
$$x = (y-1)/4 = \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}$$

Maintenant on remplace y par x et x par y on obtient

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$$

Ainsi, $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$. Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à $y = x$.



Exemple 7 *Déterminer la fonction réciproque de $f(x) = x^2$ pour $x < 0$ et tracer sa courbe.*
Solution : *Résolvons l'équation où l'inconnue est x*

$$y = x^2, \qquad x < 0$$

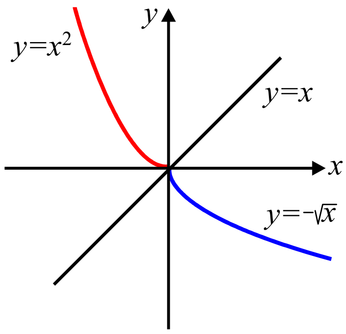
on obtient

$$x = -\sqrt{y} \qquad y > 0$$

Maintenant on remplace y par x et x par y on obtient

$$y = -\sqrt{x}, \qquad x > 0$$

Ainsi, $f^{-1}(x) == -\sqrt{x}$ pour $x > 0$. Les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à $y = x$.



Courbes de x^2 , x et $-\sqrt{x}$

11.1.6 Fonction réciproque — Dérivée

Notons que si f est bijective, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1}. Ces deux fonctions vérifient la relation suivante :

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(f(x)) = x$$

Ainsi, en dérivant des deux côtés, on obtient

$$\left(f(f^{-1}(x))\right)' = 1$$

et en utilisant la relation de la dérivation des fonctions composées :

$$u(v(x))' = u'(v(x)).v'(x)$$

on déduit que

$$\left(f(f^{-1}(x))\right)' = f'(f^{-1}(x)).(f^{-1})'(x) = 1$$

d'où

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple 8 *Déterminer la dérivée de la fonction réciproque de* $f(x) = x^3$.
Solution : *La fonction réciproque est donnée par* $f^{-1}(x) = x^{1/3}$.
Sachant que $f'(x) = 3x^2$ *et que* $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, *on déduit que*

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{3(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{3(x^{1/3})^2} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

11.1.7 Fonction réciproque — un théorème d'existence

Rappelons le théorème suivant qui est très utile pour établir l'existence de la réciproque de certaines fonctions.

Théorème 3 *Si f est une fonction*
*- **continue** sur un intervalle I ;*
*- **strictement monotone** sur un intervalle I.*
Alors f admet une fonction réciproque f^{-1} continue.

Remarque 2 *D'après le théorème ci-dessus,*

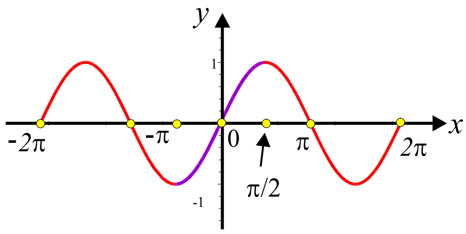
1. *si une fonction f est continue et strictement croissante sur I, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} ;*
2. *si une fonction f est continue et strictement décroissante sur I, alors elle admet une fonction réciproque f^{-1} ;*

11.2 Fonctions trigonométriques réciproques

Notons tout de suite que les fonctions trigonométriques ne sont pas injectives sur $\mathbb{R}$. Afin de déterminer leurs fonctions réciproques, on part d'intervalles, les plus grands possibles, sur les quels elles sont strictement monotones.

11.2.1 Fonction réciproque de sin − Définition

Un examen rapide du graphe de $\sin x$ montre que le plus grand intervalle sur lequel la fonction est bijective est de longueur π, et l'un de ces intervalle est $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



$y = \sin x$

En effet, $\sin x$ est bijective sur un nombre infini de tels intervalles : $\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right] \cdots$.

Pourquoi sin est bijective sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$?

La restriction de la fonction sin à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est **continue** et **strictement croissante**, donc elle est bijective. Par conséquent elle admet une fonction réciproque qu'on appelle **arcsinus** et qu'on note arcsin, ainsi :

$$\left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \underset{\text{arcsin}}{\overset{\text{sin}}{\rightleftarrows}} \quad [-1, 1]$$

Ce qui peut se traduire de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \arcsin x \\ x \in [-1, 1] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \sin y \\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array} \right.$$

11.2.2 Fonction réciproque de $\sin$ – Propriétés

On a donc les propriétés fondamentale de cette nouvelle fonction :

1. Le domaine de définition de arcsin est $[-1, 1]$;
2. Le domaine image de arcsin est $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
3. $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$;
4. $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (pourquoi ?).

Remarque 3 *Cette nouvelle fonction est une fonction comme d'autre. Rappelez-vous la fonction racine carrée* $\sqrt{x}$ *son domaine est* $[0, +\infty[$ *son domaine image est* $[0, +\infty[$.

Exemple 9 *Calculer* $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

Solution : *On est tenté de dire que la réponse est* $\frac{3\pi}{4}$ *ce qui est faut car* $\frac{3\pi}{4} \notin [-\pi/2, \pi/2]$. *Ainsi, on a besoin de trouver un nombre* x *dans* $[-\pi/2, \pi/2]$ *tel que* $\sin x = \sin(3\pi/4)$. *Comment trouver* x *?* (***Méthode 1***) *On note que* $\sin x$ *vérifie la relation de symétrie graphique*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

par suite on a $\sin(3\pi/4) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ *et* $\pi/4$ *est dans l'intervalle* $[-\pi/2, \pi/2]$. *D'où,*

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

Comment trouver x *?* (***Méthode 2***) *Cette méthode est similaire à la précédente, mais elle ne fait pas appelle à la symétrie géométrique. Plutôt, on utilise la formule (elle est facile à montrer)*

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

et don si on prend $x = \frac{\pi}{4}$ *on obtient* $\sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{4}$. *Et donc* $x = \frac{\pi}{4}$ *est la solution du problème.*

Exemple 10 *Soit* $f(x) = \arcsin\left(x^2 - 1\right)$. *Déterminer le domaine de définition et le domaine image de* f.
Solution :

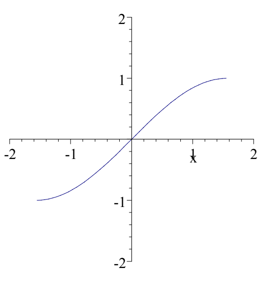
- ***Domaine :*** *La fonction* f *est définie pour les réels* x *vérifiant* $-1 \le x^2 - 1 \le 1$ *soit* $0 \le x^2 \le 2$ *d'où*

$$D = \left\{x : -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}\right\} = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$$

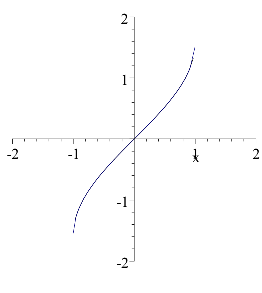
-***Domaine image :*** *il est facile de vérifier que quand* x *varie dans* $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, $x^2 - 1$ *prend toutes les valeurs entre* -1 *et* 1, *c'est-à-dire le domaine de* arcsin. *Ainsi, le domaine image de* $\arcsin\left(x^2 - 1\right)$ *est le même que celui de* $\arcsin x$, *qui est* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

11.2.3 Fonction réciproque de $\sin$ – Graphe

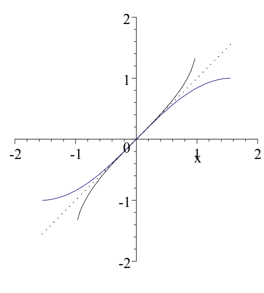
La courbe de arcsin s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de sin.



$y = \sin x$



$y = \arcsin x$



$y = \sin x$ et $y = \arcsin x$

Remarque 4 *La fonction* $\arcsin(x)$ *admet des tangentes verticales en* $x = \pm 1$. *Pourquoi ?*

11.2.4 Fonction réciproque de sin – Dérivée

La dérivée de la fonction $\arcsin x$ s'obtient par application de la formule de la dérivée de la fonction réciproque :

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

or $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et donc $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}$ comme

$$\sin^2(\arcsin x) = (\sin(\arcsin x))^2 = x^2$$

On déduit que

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

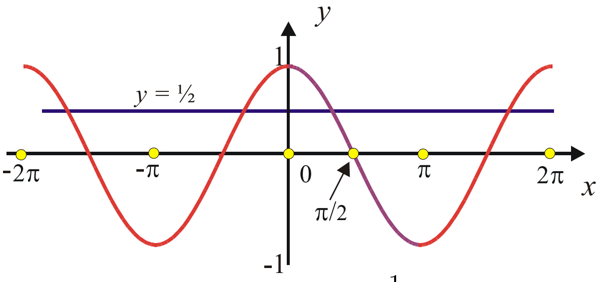
Exemple 11 *Calculer la dérivée de la fonction :* $f(x) = \arcsin\left(1 - x^2\right)$
Solution *: La fonction f est la composée des fonctions* $\arcsin()$ *et de* $1 - x^2$*. Par application de la dérivée de la fonction composée* $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$ $(f(x) = \arcsin(x)$ *et* $g(x) = 1 - x^2)$ *on a*

$$\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}\left(1 - x^2\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - x^2\right)^2}}(-2x) = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}}$$

Rappel, il n'y a rien de nouveau, on ne fait qu'appliquer la règle de dérivation de la composée.

11.2.5 Fonction réciproque de cos – Définition

La courbe de $\cos x$ ci-dessous montre qu'il y a de nombreuse possibilité de domaine de restriction où la fonction cos est bijective.



$\cos x$ et la droite $y = \frac{1}{2}$

On choisit la restriction au domaine $[0, \pi]$. Bien sûr il y a une infinité d'autres choix.

Pourquoi cos est bijective sur $[0, \pi]$?

La restriction de la fonction cos à $[0, \pi]$ est continue et croissante donc elle est bijective et par conséquent ell admet une fonction réciproque qu'on appelle **arccosinus** et qu'on note arccos, ainsi :

$$[0, \pi] \quad \underset{\text{arccos}}{\overset{\text{cos}}{\rightleftarrows}} \quad [-1, 1]$$

Ce qui peut se traduire par

$$\begin{cases} y = \arccos x \\ x \in [-1, 1] \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos y \\ y \in [0, \pi] \end{cases}$$

11.2.6 Fonction réciproque de cos – Propriétés

1. Le domaine de définition de arccos est $[-1, 1]$;
2. Le domaine image de arccos est $[0, \pi]$;
3. $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$;

4. $\arccos(\cos x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (pourquoi ?).

Exemple 12 *Déterminer le domaine de définition et le domaine image de la fonction* $f(x) = \arccos(1-2x)$.
Solution : *Notons que la fonction f est définie pour tout x tel que $-1 \leq 1-2x \leq 1$, c'est-à-dire, quand $1-2x$ est dans le domaine de* arccos. *En résolvant cette inéquation on déduit que $0 \leq x \leq 1$. D'où*

$$D_f = [0,1]$$

Par ailleurs, quand x varie dans l'intervalle $[0,1]$, $1-2x$ prend toute les valeurs de $[-1,1]$. Ainsi,

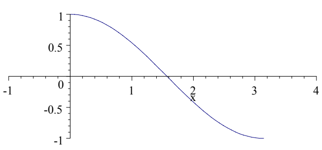
$$\operatorname{Im} f = [0,\pi]$$

Exemple 13 *Calculer* $\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. *On est tenté de dire que la réponse est $-\frac{\pi}{4}$ ce qui est faut car $-\frac{\pi}{4} \notin [0,\pi]$. Ainsi, on a besoin de trouver un nombre x dans $[0,\pi]$ tel que $\cos x = \sin(-\pi/4)$. Comme $\cos x$ est une fonction paire on a $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Ainsi,*

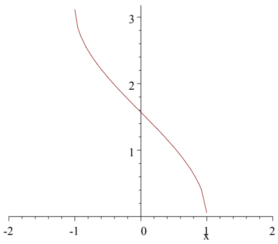
$$\arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

11.2.7 Fonction réciproque de $\cos$ – Graphe

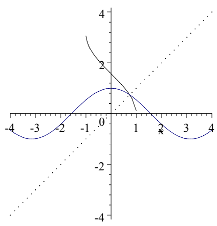
La courbe de arccos s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de cos :



$y = \cos x$



$y = \arccos x$



$y = \cos x$ et $y = \arccos x$

Remarque 5 *La fonction* $\arccos(x)$ *admet des tangentes verticales en $x = \pm 1$. Pourquoi ?*

11.2.8 Fonction réciproque de $\cos$ – Dérivée

La dérivée de la fonction $\arccos x$ s'obtient par application de la formule de la dérivée de la fonction réciproque :

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}$$

or $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et donc $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$. D'où

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarque 6 *Noter qu'on a la relation suivante :*

$$\arcsin' x + \arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

autrement

$$\arcsin' x = -\arccos' x$$

Exemple 14 *On considère la fonction $f(x) = \arccos(e^x)$. Calculer $\frac{df}{dx}$.*
Solution *: La fonction f est la composée des fonctions* arccos() *et de e^x. Par application de la dérivée de la fonction composée $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$ ($f(x) = \arccos(x)$ et $g(x) = e^x$) on a*

$$\frac{d}{dx}(\arccos(e^x)) = \frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

Rappel : il n'y a rien de nouveau, on ne fait qu'appliquer la règle de dérivation de la composée.

11.2.9 Relation fondamentale

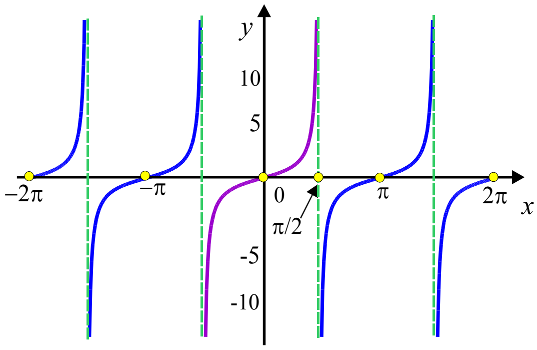
Exercice 1 *Etablir la relation fondamentale suivante*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

Démonstration en TD (indication : si la dérivée est nulle sur un intervalle, alors la fonction est une constante).

11.2.10 Fonction réciproque de tan − Définition

Rappelons le graphe de $\tan x$.



$y = \tan x$

Comme vous pouvez le constater, l'ensemble image de tan est $\mathbb{R}$ et cette fonction $\tan x$ est bijective sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ (car continue et croissante). La restriction de la fonction tan à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque qu'on appelle **arctangente** et qu'on note arctan, ainsi :

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \underset{\xleftarrow[\text{arctan}]{}}{\xrightarrow{\text{tan}}} \quad \mathbb{R}$$

Ce qu'on peut traduire par

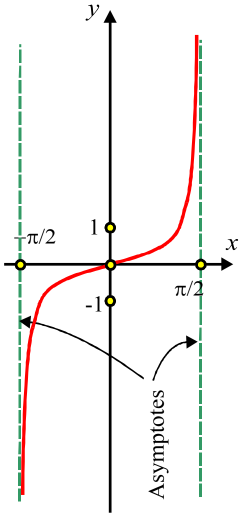
$$\left\{ \begin{array}{c} y = \arctan x \\ x \in \mathbb{R} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x = \tan y \\ y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array} \right.$$

11.2.11 Fonction réciproque de tan − Propriétés

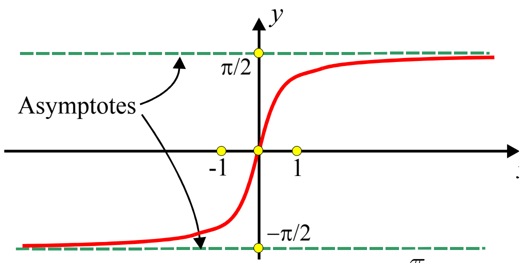
1. Le domaine de définition de arctan est $\mathbb{R}$;
2. Le domaine image de arctan est $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
3. $\tan(\arctan x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
4. $\arctan(\tan x) = x$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

11.2.12 Fonction réciproque de $\tan$ – Graphe

La courbe de arctan s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de tan .



$y = \tan x$



$\arctan x$ et les asymptotes $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$

Exemple 15 *Calculer* $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

Solution : $\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ *n'est pas égale à* $\frac{5\pi}{4}$ *car* $\frac{5\pi}{4} \notin \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *Sachant que* $\tan x$ *est périodique de période* π, *on a,* $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$, *et donc*

$$\arctan\left(\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4}$$

11.2.13 Fonction réciproque de $\tan$ – Dérivée

La dérivée de la fonction $\arctan x$ s'obtient par application de la formule de la dérivée de la fonction réciproque :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}$$

d'où

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

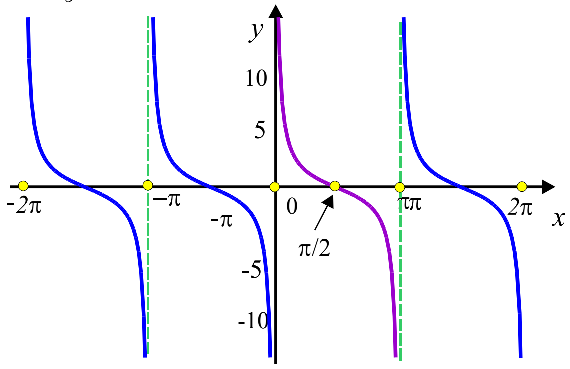
Exemple 16 *Calculer la dérivée de* $f(x) = \arctan(\sin x)$.

Solution : *La fonction* f *est la composée de* $\arctan()$ *et* $\sin x$*, par application de la dérivation de la composée on a*

$$\frac{d}{dx}(\arctan(\sin x)) = \frac{1}{1+\sin^2 x}\frac{d}{dx}\sin x = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

11.2.14 Fonction réciproque de $\cot$ – Définition

Rappelons ci-dessous le graphe de $y = \cot x$.



$y = \cot x$

Noter que la fonction $\cot x$ n'est pa bijective sur son domaine de définition, mais que sa restriction à l'intervalle $]0, \pi[$ l'est (continue et strictement croissante).

Ainsi, la restriction de la fonction cot à $]0, \pi[$ admet une fonction réciproque qu'on appelle arccotangente et qu'on note arccot. On a donc :

$$]0, \pi[\quad \underset{\text{arccot}}{\overset{\text{cot}}{\rightleftarrows}} \quad \mathbb{R}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} y = \operatorname{arccot} x \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cot y \\ y \in \,]0, \pi[\end{cases}$$

11.2.15 Fonction réciproque de $\cot$ – Propriétés

1. Le domaine de définition de arccot est $\mathbb{R}$;
2. Le domaine image de arccot est $]0, \pi[$;
3. $\cot(\operatorname{arccot} x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
4. $\operatorname{arccot}(\cot x) = x$ pour tout $x \in \,]0, \pi[$.

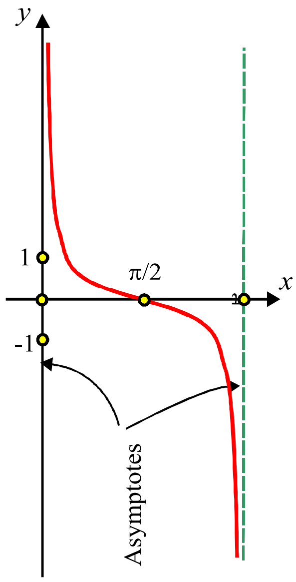
Exemple 17 *Calculer* $\operatorname{arccot}\left(\cot(\frac{-\pi}{4})\right)$.

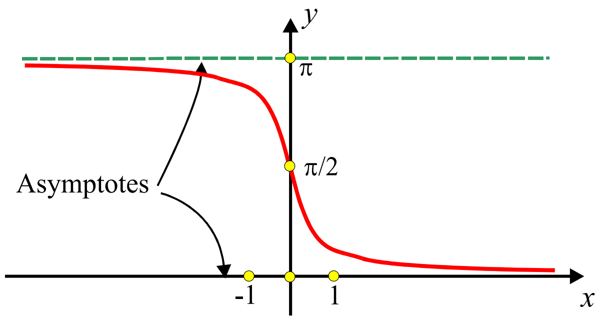
Solution : *Comme précédemment, on doit trouver un angle θ dans l'ensemble image de* arccot *tel que* $\cot \theta = \cot(\frac{-\pi}{4})$. *Comme* $\cot x$ *est périodique de période π, on a* $cot\frac{3\pi}{4} = \cot \frac{-\pi}{4}$. *Par conséquent,*

$$\operatorname{arccot}\left(\cot \frac{-\pi}{4}\right) = \operatorname{arccot}\left(\cot \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

11.2.16 Fonction réciproque de cot − Graphe

La courbe de arccot s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de la courbe de cot tan .





$y = \operatorname{arccot} x$

11.2.17 Fonction réciproque de cot − Dérivée

La dérivée de la fonction $\operatorname{arccot} x$ s'obtient par application de la formule de la dérivée de la fonction réciproque :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\cot'(\operatorname{arccot} x)} = \frac{1}{-1-\cot^2(\operatorname{arccot} x)} = \frac{-1}{1+\cot^2(\operatorname{arccot} x)}$$

d'où

$$\arctan' x = \frac{-1}{1+x^2}$$

Exemple 18 *Déterminer la dérivée de* $f(x) = \operatorname{arccot}(2x+1)$*.*
Solution : *Par application de la formule de dérivation de la composée, on a*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\operatorname{arccot}(2x+1)) &= \frac{-1}{1+(2x+1)^2}\frac{d}{dx}(2x+1) = \frac{-2}{1+(2x+1)^2} = \frac{-2}{4x^2+4x+2} \\ &= \frac{-1}{2x^2+2x+1}\end{aligned}$$

11.2.18 Fonctions trigonométriques réciproques − Résumé

Fonction	Domaine	Image	Dérivée
arcsin	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $\lvert x\rvert < 1$
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $\lvert x\rvert < 1$
arctan	$]-\infty, \infty[$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$\frac{1}{1+x^2}$ pour tout x
arccot	$]-\infty, \infty[$	$]0, \pi[$	$\frac{-1}{1+x^2}$ pour tout x

Fonction		Formule de la dérivée de la composée	
$\frac{d}{dx}[\arcsin(g(x))]$	$=$	$\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$	pour $\lvert g(x)\rvert < 1$
$\frac{d}{dx}[\arccos(g(x))]$	$=$	$\frac{-g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}$	pour $\lvert g(x)\rvert < 1$
$\frac{d}{dx}[\arctan(g(x))]$	$=$	$\frac{g'(x)}{1+g^2(x)}$	pour tout x
$\frac{d}{dx}[\text{arccot}(g(x))]$	$=$	$\frac{-g'(x)}{1+g^2(x)}$	pour tout x

11.3 Fonctions exponentielles de base a

11.3.1 Fonctions exponentielles de base a – Propréités

La fonction exponentielle de base a, réel positif ($a > 0$), a les propriétés algébriques suivantes :
- $a^0 = 1$,
- $a^{x+z} = a^x a^z$,
- $a^{x-z} = \frac{a^x}{a^z}$,
- $(a^x)^z = a^{xz}$,
- $a^x b^x = (ab)^x$, $\quad b > 0$
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, $\quad b > 0$

Exemples
- $2^4 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} = 1024$
- $3^8/3^6 = 3^{8-6} = 3^2 = 9$
- $(2^2)^3 = 2^6 = 64$
- $(4^2)^{-2} = 4^{-4} = 1/256$
- $2^{-4}2^8 = 2^{-4+8} = 2^4 = 16$
- $3^{-2}4^{-2} = 12^{-2} = 1/12^2 = 1/144$

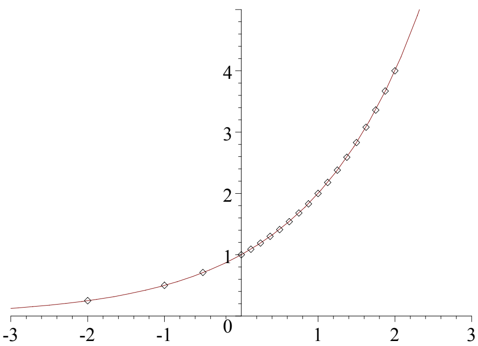
Exercice 2 *Simplifier (a)* $2^3 2^6$, *(b)* $\left(4^5\right)^6$, *(c)* $3^3 4^2 3^4$.

11.3.2 Fonctions exponentielles de base a – Graphe

On détermine l'image d'un certain nombre de réels puis on les joint (Ce n'est pas une méthode conseillée).

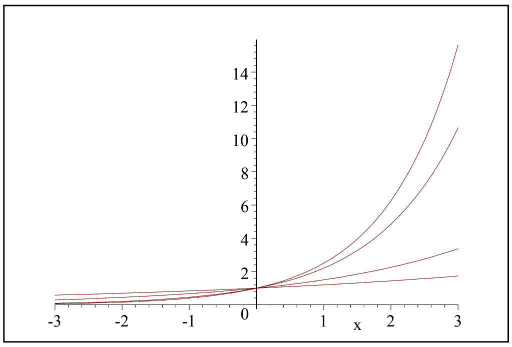
Exemple 19 *Graphe de* $y = 2^x$

x	2^x	x	2^x	x	2^x
0	1.00	$\frac{9}{8}$	2.18	-2	0.25
$\frac{1}{8}$	1.09	$\frac{10}{8}$	2.38	-1	0.50
$\frac{2}{8}$	1.19	$\frac{11}{8}$	2.59	$-\frac{1}{2}$	0.71
$\frac{3}{8}$	1.30	$\frac{12}{8}$	2.83		
$\frac{4}{8}$	1.41	$\frac{13}{8}$	3.08		
$\frac{5}{8}$	1.54	$\frac{14}{8}$	3.36		
$\frac{6}{8}$	1.68	$\frac{15}{8}$	3.67		
$\frac{7}{8}$	1.83	2	4.00		
1	2.00				



$y = 2^x$

Pour tout $a > 1$, les graphes de $y = a^x$ ont le même comportement que celui de $y = 2^x$.

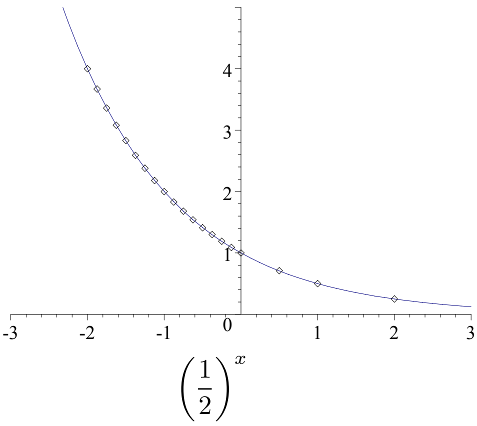


Exemple 20 *Graphe de* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. *Noter que*

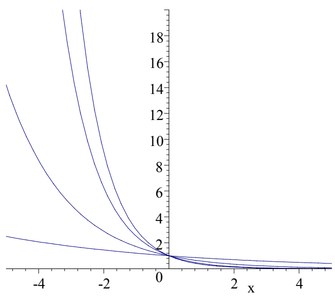
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$$

Ainsi le graphe de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ *est la symétrie par rapport à* Oy *du graphe de* $y = 2^x$.

x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1.00	$-\frac{10}{8}$	2.38
$-\frac{1}{8}$	1.09	$-\frac{11}{8}$	2.59
$-\frac{2}{8}$	1.19	$-\frac{12}{8}$	2.83
$-\frac{3}{8}$	1.30	$-\frac{13}{8}$	3.08
$-\frac{4}{8}$	1.41	$-\frac{14}{8}$	3.36
$-\frac{5}{8}$	1.54	$-\frac{15}{8}$	3.67
$-\frac{6}{8}$	1.68	-2	4.00
$-\frac{7}{8}$	1.83	$\frac{1}{2}$	0.71
-1	2.00	1	0.50
$-\frac{9}{8}$	2.18	2	0.25



Pour tout $0 < a < 1$, les graphes de $y = a^x$ ont le même comportement que celui de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



11.4 Fonction exponentielle de base e

11.4.1 Fonction exponentielle – Définition

Rappelons qu'après 0 et 1, le nombre le plus important en calcul différentiel et e. En effet e est plus important que π. Voici le nombre e avec dix chiffres après la virgule : 2.718281828. Et Voici e avec 50 chiffres après la virgule :

$$e \approx 2.71828182845904523536028747135266249775724709370000$$

Ce nombre e est utilisé pour définir la fonction exponentielle.

Dèfinition 3 *La fonction exponentielle est définie par :*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & e^x \end{array}$$

Son domaine est $\mathbb{R}$ *et son domaine image est* $[0, +\infty[$. *On la note aussi* $\exp(x)$.

Remarque 7 *Noter que quand on dit fonction exponentielle cela veut dire Fonctions exponentielles de base e.*

11.4.2 Fonction exponentielle – Propriétés et limites usuelles

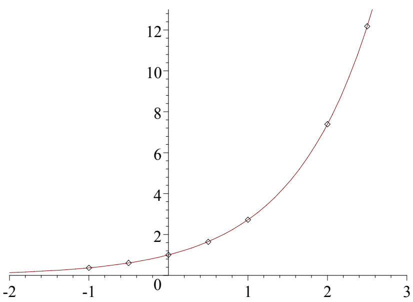
La fonction exponentielle a les propriétés suivantes :
- $e^0 = 1$
- $e^{x+z} = e^x e^z$
- $e^{x-z} = e^x / e^z$
- $(e^x)^z = e^{xz}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

Il est très important de retenir ces propriétés.

11.4.3 Fonction exponentielle – Graphe

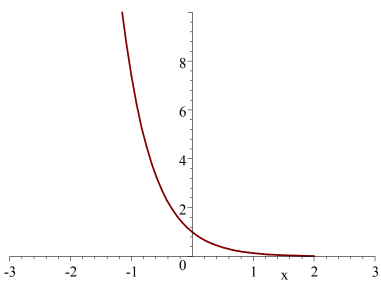
Il est important de connaître l'allure de la courbe de cette fonction. On détermine l'image d'un certain nombre de réels puis on les joint.

x	e^x
-1	.36788
-0.5	.60653
0	$\boxed{1.0}$
0.5	1.6487
1	2.7183
2	7.3891
2.5	12.182



$y = e^x$

Exemple 21 *Tracer le graphe de* $y = e^{-2x}$.
Solution *: En utilisant les propriétés de l'exponentiel on a :* $e^{-2x} = (e^{-2})^x = (1/e^2)^x$. *Ainsi, on peut tracer le graphe de cette fonction en calculant d'abord* $1/e^2$ *puis on évalue* $(1/e^2)^x$ *pour chaque* x.



$y = e^{-2x}$

11.4.4 Fonction exponentielle – Dérivée

Par définition, la dérivée d'une fonction f est donnée par :

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ainsi, pour $f(x) = e^x$ sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(e^x) &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} e^x \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) \qquad \text{car } \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x \left(\frac{e^h - 1}{h}\right) \\
&= e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}
\end{aligned}$$

La détermination de cette dérivée nécessite le calcul de la limite de $(e^h - 1)/h$ quand h tend 0. En utilisant la calculette, il est facile d'obtenir les résultats suivants :

h	$\frac{e^h - 1}{h}$
.1	1.105170918
.05	1.051271096
.01	1.010050167
.001	1.001000500
.0001	1.000100005
.00001	1.000010000

Il apparaît que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Ce qui est vraie ! d'où

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

C'est une propriété remarquable de la fonction $y = e^x$. **La dérivée de la fonction est la fonction elle même !**

11.4.5 Fonction exponentielle – Dérivée de la composée

La fonction

$$f(x) = e^{v(x)} = u(v(x))$$

est la composée de la fonction exponentielle $u(x) = e^x$ et de la fonction v. En appliquant la règle de dérivation de la fonction composée

$$[u(v(x))]' = u'(v(x)).v'(x)$$

et en tenant compte du fait que

$$u'(x) = (e^x)' = e^x$$

on déduit

$$\frac{d}{dx} e^{v\,(x)} = e^{v(x)} \cdot v'\,(x)$$

Exemple 22 *Déterminer la dérivée de $f(x) = e^{2x}$.*
Solution : *cette fonction est de la forme $f(x) = e^{v(x)}$. D'où sa dérivée est :*

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}) = e^{2x}\frac{d}{dx}(2x) = 2e^{2x}$$

Exemple 23 *Soient k et C deux nombres réels fixes et t une variable. Vérifier que la fonction $f(x) = Ce^{kt}$ est solution de l'équation différentielles : $ky - y' = 0$.*

Solution : *Si $f(x) = Ce^{kt}$, alors sa dérivée est $f' = Cke^{kt}$ et $ky = kCe^{kt}$. Ainsi,*

$$kf' - f' = Cke^{kt} - kCe^{kt} = 0$$

11.5 Fonctions hyperboliques

11.5.1 Fonctions hyperboliques – Définitions

Dèfinition 4 *La fonction cosinus hyperbolique (*$\cosh$*) est la fonction définie par :*

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dèfinition 5 *La fonction sinus hyperbolique (*$\sinh$*) est la fonction définie par :*

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Dèfinition 6 *La fonction tangente hyperbolique (*$\tanh$*) est la fonction définie par :*

$$\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

11.5.2 Fonctions hyperboliques – Fonction $\cosh$

- **Parité** : La fonction cosh est paire car :

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

- **Dérivée :**

$$\cosh'(x) = (\frac{e^x + e^{-x}}{2})' = \frac{1}{2}((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

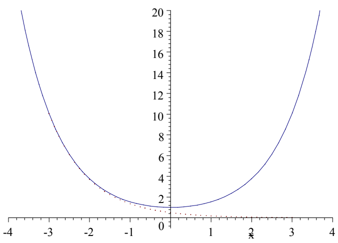
  et donc

$$\cosh'(x) = \sinh(x)$$

  Ainsi cosh est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.
- **Graphe** : On peut décomposer la fonction cosh comme suit

$$\cosh(x) = \frac{e^x}{2} + \varphi(x) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = \frac{e^{-x}}{2}$$

  Notons que $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}e^{-x} = 0$, donc la courbe d'équation $y = \dfrac{e^{-x}}{2}$ est asymptote à la courbe de $\cosh x$. D'où on déduit le graphe de $\cosh x$



Graphe de $\cosh x$ et $\frac{e^{-x}}{2}$

11.5.3 Fonctions hyperboliques – Fonction sinh

- **Parité** : La fonction sinh est impaire car :

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh(x)$$

- **Dérivée :**

$$\sinh'(x) = \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}((e^{x})' - (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

et donc

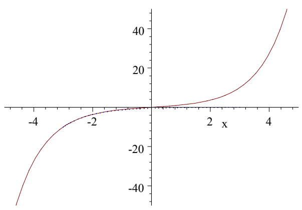
$$\sinh'(x) = \cosh(x)$$

Ainsi sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car $\cosh x$ est toujours positive.

- **Graphe** : On peut décomposer la fonction sinh comme suit

$$\sinh(x) = \frac{e^{x}}{2} + \varphi(x) \quad \textit{avec} \quad \varphi(x) = -\frac{e^{-x}}{2}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ donc la courbe d'équation $y = \frac{e^{-x}}{2}$ est asymptote à la courbe de $\sinh x$.



Graphe de $\sinh x$ et $-\frac{e^{-x}}{2}$

11.5.4 Fonctions hyperboliques – Relation fondamentale

Il est facile d'établir la relation fondamentale suivante :

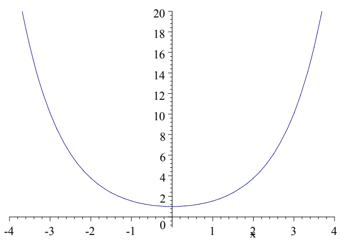
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

A faire en exercice.

11.6 Fonctions hyperboliques réciproques

11.6.1 Fonction réciproque de cosh – Définition

Rappelons le graphe de $\cosh x$.



Graphe de $\cosh x$

On peut facilement constater que l'ensemble image de cosh est $[1, +\infty[$ et que cette fonction n'est pas bijective. Par contre sa restriction sur l'intervalle $[0, +\infty[$ est bijective (car continue et croissante). Sur cette intervalle, cosh admet une fonction réciproque qu'on appelle **argument cosinus hyperbolique** et qu'on note arg cosh, ainsi :

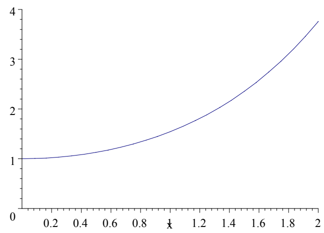
$$\begin{matrix} y = \operatorname{arg}\cosh x \\ x \in [1, +\infty[\end{matrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{matrix} x = \cosh y \\ y \in [0, +\infty[\end{matrix}$$

11.6.2 Fonction réciproque de $\cosh$ − Propriétés

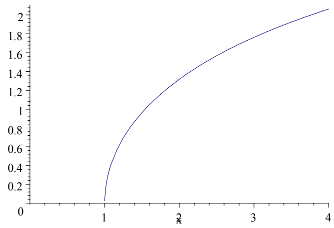
1. Le domaine de définition de $\arg\cosh$ est $[1, +\infty[$;
2. Le domaine image de $\arg\cosh$ est $[0, +\infty[$;
3. $\cosh(\arg\cosh x) = x$ pour tout $x \in [1, +\infty[$;
4. $\arg\cosh(\cosh x) = x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.

11.6.3 Fonction réciproque de $\cosh$ − Graphe

La courbe de $\arg\cosh$ s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de celle de la restriction de $\cosh x$ à $[0, +\infty[$.



Restriction de $\cosh x \quad [0, +\infty[$.



Fonction $y = \arg\cosh x$

Exemple 24 *Calculer* $\arg\cosh(\cos(-1))$.
Solution : $\arg\cosh(\cos(-1))$ *n'est pas égale à* -1, *car* $-1 \notin [0, +\infty[$, *on doit trouver un réel* a *dans l'ensemble image de* $\arg\cosh$ *tel que* $\cosh a = \cot(-1)$. *Comme* $\cosh x$ *est paire, on a* $\cosh(-1) = \cosh(1)$, *on a*

$$\arg\cosh(\cos(-1)) = \arg\cosh(\cos(1)) = 1$$

11.6.4 Fonction réciproque de $\cosh$ − Dérivée

La dérivée de la fonction $\arg\cosh x$ s'obtient par application de la formule de la dérivée de la fonction réciproque :

$$\arg\cosh'(x) = \frac{1}{\cosh'(\arg\cosh x)} = \frac{1}{\sinh(\arg\cosh x)}$$

or d'après la relation fondamentale on a : $\sinh^2 y = \cosh^2 y - 1$ donc $\sinh^2(\arg\cosh x) = \cosh^2(\arg\cosh x) - 1 = x^2 - 1$ et donc $\sinh(\arg\cosh x) = \sqrt{x^2 - 1}$. D'où

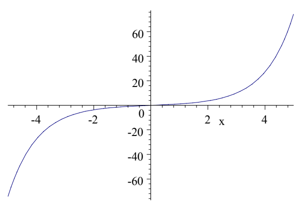
$$\arg\cosh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Exemple 25 *Calculer la dérivée de* $f(x) = \arg\cosh\left(x^2 + 1\right)$.
Solution : f *est la composée de* $\arg\cosh()$ *et* $x^2 + 1$, *par application de la dérivation de la composée on a*

$$\frac{d}{dx}\left(\arg\cosh\left(x^2 + 1\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 1)^2 - 1}} \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2 + 1)^2 - 1}}$$

11.6.5 Fonction réciproque de $\sinh$ − Définition

Rappelons le graphe de $\sinh x$.



$y = \sinh x$

On remarque que l'ensemble image de sinh est $]-\infty,+\infty[$ et que cette fonction est bijective (car continue et croissante). La fonction sinh admet une fonction réciproque qu'on appelle **argument sinus hyperbolique** et qu'on note arg sin, ainsi :

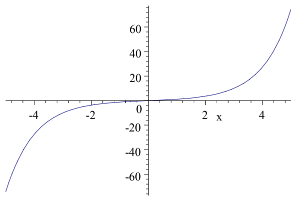
$$\begin{array}{c} y = \arg\sinh x \\ x \in]-\infty,+\infty[\end{array} \iff \begin{array}{c} x = \sinh y \\ y \in]-\infty,+\infty[\end{array}$$

11.6.6 Fonction réciproque de sinh – Propriétés

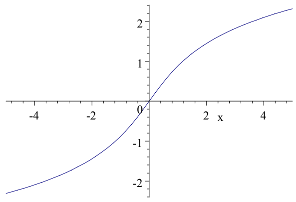
1. Le domaine de définition de $\arg\sinh$ est $]-\infty,+\infty[$;
2. Le domaine image de $\arg\sinh$ est $]-\infty,+\infty[$;
3. $\sinh(\arg\sinh x) = x$ pour tout $x \in]-\infty,+\infty[$;
4. $\arg\sinh(\sinh x) = x$ pour tout $x \in]-\infty,+\infty[$.

11.6.7 Fonction réciproque de sinh – Graphe

La courbe de arg sinh s'obtient par symétrie par rapport à la première bissectrice de celle $\sinh x$.



$y = \sinh x$



$y = \arg\sinh x$

Exemple 26 *Calculer* $\arg\sinh(\sinh(-1))$.
Solution : $\arg\sinh(\sinh(-1)) = -1$ *car* $\arg\sinh(\sinh x) = x$ *pour tout* $x \in]-\infty,+\infty[$.

11.6.8 Fonction réciproque de sinh – Dérivée

Par application de la formule de la dérivée de la fonction réciproque :

$$\arg\sinh'(x) = \frac{1}{\sinh'(\arg\sinh x)} = \frac{1}{\cosh(\arg\sinh x)}$$

or d'après la relation fondamentale on a : $\cosh^2 y = \sinh^2 y + 1$ donc $\cosh^2(\arg\sinh x) = \sinh^2(\arg\sinh x) + 1 = x^2 + 1$ et donc $\cosh(\arg\sinh x) = \sqrt{x^2+1}$. D'où

$$\arg\sinh' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

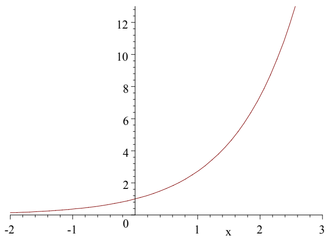
Exemple 27 *Calculer la dérivée de* $f(x) = \arg\sinh\left(x^2-1\right)$.
Solution : *f est la composée de* $\arg\sin()$ *et* x^2-1, *par application de la dérivation de la composée on a*

$$\frac{d}{dx}\left(\arg\sinh\left(x^2-1\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^2+1}}\frac{d}{dx}(x^2-1) = \frac{2x}{\sqrt{(x^2-1)^2+1}}$$

11.7 Fonction logarithme

11.7.1 Fonction logarithme – Définition

Considérons le graphe de la fonction exponentielle.



$y = e^x$

Cette fonction est continue et strictement croissante, elle admet donc une fonction réciproque : c'est la fonction logarithme et qu'on note

$$y = \ln x$$

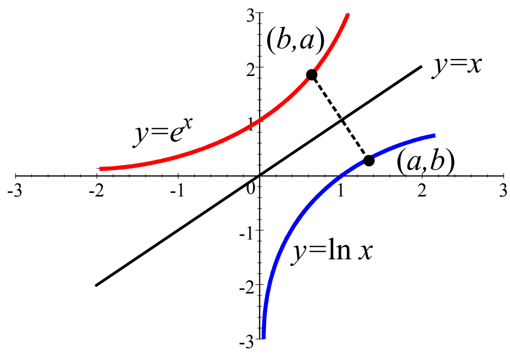
Dèfinition 7 La fonction $y = \ln x$ est la réciproque de la fonction exponentielle.

Rappelons que le *domaine* de la fonction ln est le domaine image de exp. Ainsi

$$\text{Domaine de } \ln \text{ est }]0, +\infty[$$

11.7.2 Fonction logarithme – Graphe

Comme la fonction ln est la réciproque de la fonction exp. Leurs graphes sont symétrique par rapport à $y = x$.



11.7.3 Fonction logarithme – Propriétés

Si (a, b) est un point du graphe de $y = e^x$, alors le point (b, a) est un point de la courbe de $y = \ln x$. On a donc

$$b = e^a \quad \text{et} \quad a = \ln b$$

d'où on déduit que

$$b = e^{\ln b} \quad \text{pour tout } b > 0 \text{ (on remplace } a \text{ par } \ln b)$$

et

$$a = \ln e^a \quad \text{pour tout } a \text{ (on remplace } b \text{ par } e^a)$$

En terme de x, on a

$e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$;

$\ln e^x = x$ pour tout x.

Remarque 8 *Notons qu'avec ces deux propriétés, il est possible de résoudre beaucoup d'équations en logarithme et exponentiel.*

D'après la deuxième propriété, on

$$\ln e^0 = 0 \quad \text{soit} \quad \ln 1 = 0$$

et

$$\ln e^1 = 1 \quad \text{soit} \quad \ln e = 1$$

d'où

$\ln 1 = 0$;
$\ln e = 1$.

Exemple 28 *Résoudre l'équation* $e^{2x+3} = 4$.
Solution : *Par application de la fonction* ln *des deux côtés on obtient*

$$\ln e^{2x+3} = \ln 4$$

Et en tenant compte du faite que $\ln e^y = y$, *on a*

$$2x + 3 = \ln 4$$

d'où

$$x = \frac{1}{2}(\ln 4 - 3)$$

Exemple 29 *Résoudre l'équation* $\ln(4x - 1) = 9$.
Solution : *Par application de la fonction* exp *des deux côtés on obtient*

$$e^{\ln(4x-1)} = e^9$$

Et en tenant compte du faite que $e^{\ln y} = y$, *on a*

$$4x - 1 = e^9$$

soit

$$x = \frac{1}{4}(e^9 + 1)$$

A partir des propriétés de la fonction exponentielle, on déduit les propriétés de la fonction ln suivantes :

$\ln xz = \ln x + \ln z$, si $x > 0$ et $z > 0$
$\ln \dfrac{x}{z} = \ln x - \ln z$, si $x > 0$ et $z > 0$
$\ln \dfrac{1}{z} = -\ln z$, si $z > 0$
$\ln x^z = z \ln x$, si $x > 0$ et z réel quelconque.

On peut facilement montrer ces relations. Voici la preuve :

- Preuve de $\ln xz = \ln x + \ln z$, si $x > 0$ et $z > 0$.
  En posant $x = e^s$ et $z = e^t$, on a

$$\ln(xz) = \ln(e^s e^t) = \ln e^{s+t} = s + t$$

  et comme $\ln x = \ln e^s = s$ et $\ln z = \ln e^t = t$, on a

$$\ln xz = \ln x + \ln z$$

– Preuve de $\ln \dfrac{x}{z} = \ln x - \ln z$, si $x > 0$ et $z > 0$.
En posant $x = e^s$ et $z = e^t$ comme ci-dessus. On a

$$\ln \frac{x}{z} = \ln \frac{e^s}{e^t} = \ln e^{s-t} = s - t$$

comme $\ln x = s$ et$\ln z = t$, on obtient

$$\ln \frac{x}{z} = \ln x - \ln z$$

– Preuve de $\ln \dfrac{1}{z} = -\ln z$, si $z > 0$.
En prenant $x = 1$ dans la relation précédente, on a $\ln(1/z) = \ln 1 - \ln z = -\ln z$.
– Preuve de $\ln x^z = z \ln x$ si $x > 0$ et z réel quelconque.
Posons $x = e^s$. Alors

$$\ln x^z = \ln(e^s)^z = \ln e^{zs} = zs$$

En tenant compte du fait que $\ln x = s$, on a

$$\ln x^z = z \ln x$$

Exemple 30 *Simplifier les expressions suivantes : a.* $\ln 2^3$, *b.* $\ln \dfrac{4}{3}$, *c.* $\ln 8 - \ln 2$, *d.* $\ln 6 + \ln \dfrac{1}{6}$.
Solution :
a. $\ln 2^3 = 3 \ln 2$. *(car* $\ln x^z = z \ln x$*)*
b. $\ln \frac{4}{3} = \ln 4 - \ln 3$. *(*$\ln \frac{x}{z} = \ln x - \ln z$*). Comme* $4 = 2^2$*, alors* $\ln 4 = 2 \ln 2$*. d'où,* $\ln \frac{4}{3} = 2 \ln 2 - \ln 3$.
c. $\ln 8 - \ln 2 = \ln \frac{8}{2} = \ln 4$. *(car* $\ln x - \ln z = \ln \frac{x}{z}$*) et comme* $\ln 4 = 2 \ln 2$*, alors* $\ln 8 - \ln 2 = 2 \ln 2$.
d. $\ln 6 + \ln \frac{1}{6} = \ln 6 \dfrac{1}{6} = \ln 1 = 0$. *(car* $\ln x + \ln z = \ln(xz)$*)*

11.7.4 Fonction logarithme – Dérivée

D'après la première propriété ci-dessus, on a

$$e^{\ln x} = x$$

en dérivant des deux côtés et tenant compte du fait que $(e^x)' = e^x$, on obtient (dérivée de la composée)

$$\frac{d}{dx}(e^{\ln x}) = e^{\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = 1$$

d'où la dérivée de $\ln x$ est donnée par

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

Exemple 31 *Soit* $y = \ln x^2$*, déterminer* y'.
Solution *: Notons que* $y = \ln x^2 = 2 \ln x$*, ainsi,*

$$y' = (2 \ln x)' = 2 \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$$

11.7.5 Fonction logarithme – Dérivée $\ln(v(x))$

La fonction $y = \ln(v(x))$ est la composée de la fonction $\ln(\ )$ et de la fonction $v(x)$. Par application de la règle de dérivation de la fonction composée

$$u(v(x)) = u'(v(x)).v'(x)$$

on obtient

$$\frac{d}{dx}[\ln(v(x))] = \ln'(v(x)).v'(x)$$

Soit

$$\frac{d}{dx}[\ln(v(x))] = \frac{v'(x)}{v(x)} \qquad \text{si } v(x) > 0 \text{ et dérivable}$$

En utilisant cette règle on obtient la formule générale importante :

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

Notons que $|x| = (x^2)^{1/2}$, et donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\ln|x|] &= \frac{d}{dx}[\ln(x^2)^{1/2}] && \text{car } |x| = (x^2)^{1/2} \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln x^2\right) && \text{car } \ln x^z = z\ln x \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}(\ln x^2) && \text{car } \frac{d}{dx}(a.u(x)) = a.\frac{d}{dx}(u(x)) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2) && \text{car } \frac{d}{dx}[\ln(v(x))] = \frac{1}{v(x)}.v'(x) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

D'où la preuve de la formule.

Exemple 32 *Calculer* $\frac{d}{dx}\ln|2x|$.

Solution : *En utilisant la règle de dérivation ci-dessus, et en tenant compte de* $\frac{d}{dx}2x = 2$ *il est facile de trouver que*

$$\frac{d}{dx}\ln|2x| = \frac{1}{x}$$

Attention on a bien $\frac{d}{dx}\ln 2x = \frac{1}{x}$ *(ce n'est pas une erreur).*

Exemple 33 *Déterminer* $\frac{d}{dx}\left[\ln\left(x\sqrt{x+1}\right)\right]$.

Solution : *En prenant* $u(x) = x\sqrt{x+1}$ *et donc* $u'(x) = \sqrt{x+1} + x/(2\sqrt{x+1})$, *on a*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\ln(x\sqrt{x+1})] &= \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\cdot\frac{d}{dx}(x\sqrt{x+1}) \\
&= \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x+1} + \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\right) \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)}
\end{aligned}$$

Autrement : En développant $\ln(x\sqrt{x+1})$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\ln(x\sqrt{x+1})] &= \frac{d}{dx}[\ln x + \ln(x+1)^{1/2}] \\
&= \frac{d}{dx}\left[\ln x + \frac{1}{2}\ln(x+1)\right] \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+1)}
\end{aligned}$$

<u>NOTE :</u> Dans la majorité des problèmes il est préférable d'utiliser la deuxième méthode.

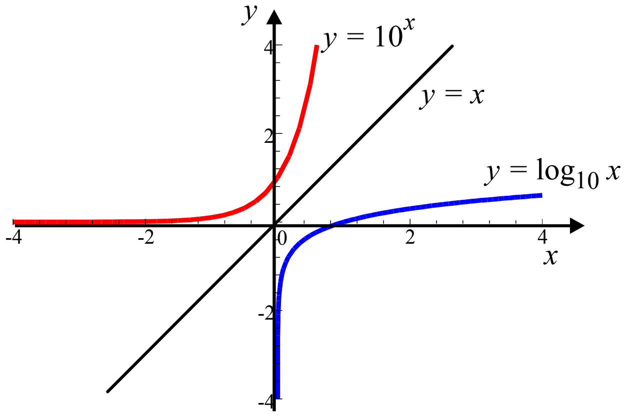
11.8 Fonctions logarithme de base a $(a > 0)$

11.8.1 Fonctions logarithme de base a – Définition

Ci-dessus on a défini la fonction $\ln x$ comme étant la réciproque de la fonction e^x. De la même manière on définit la **fonction logarithme de base** a $(a > 0)$ comme étant la fonction réciproque de la fonction exponentielle a^x. On note

$$y = \log_a x$$

Par exemple, la réciproque de $y = 10^x$ est communément connue sous le nom de logarithme de base 10. Elle se note $\log_{10} x$.



$y = \log_{10} x$ et $y = 10^x$

11.8.2 Fonctions logarithme de base a – Propriétés

Les propriétés basiques de cette fonction sont identiques à celles de $\ln x$.
- $a^{\log_a x} = x$ pour $x > 0$;
- $\log_a (a^x) = x$ pour tout x ;
- $\log_a 1 = 0$;
- $\log_a a = 1$;
- $\log_a (xz) = \log_a x + \log_a z \qquad x > 0, z > 0$;
- $\log_a \dfrac{x}{z} = \log_a x - \log_a z \qquad x > 0, z > 0$;
- $\log_a \frac{1}{z} = -\log_a z \qquad z > 0$;
- $\log_a (x^z) = z \log_a x \qquad x > 0$, z réel quelconque.

Remarque 9 *Si* $a = 10$, $\log_a x = \log_{10} x = \log x$*—c'est la notation communément utilisée— et, si* $a = e$*, on a* $\log_e x = \ln x$.

11.8.3 Fonctions logarithme de base a – Changement de base

Notons que l'écriture

$$\log_a x = s$$

signifie que

$$x = a^s$$

En appliquant la fonction ln des deux côtés, on obtient

$$\ln x = \ln a^s = s \ln a$$

Soit

$$s = (\ln x)/(\ln a)$$

D'où la nouvelle formulation de la fonction logarithme de base a

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

11.8.4 Fonctions logarithme de base a – Dérivation

Il est facile de déterminer la dérivée de $y = \log_a x$ en utilisant la relation

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Ainsi

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln a}\ln x\right) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x.\ln a}$$

Et par conséquent, si $u(x) > 0$ et dérivable, on a

$$\frac{d}{dx}[\log_a u(x)] = \frac{u'(x)}{u(x).\ln a}$$

Exemple 34 *Calculer* $\frac{d}{dx}\left(\log_{10} x^2\right)$.

Solution *Par application de la formule de dérivation de la fonction composée, avec* $u(x) = x^2$,

$$\frac{d}{dx}(\log_{10} x^2) = \frac{\frac{d}{dx}x^2}{x^2\ln 10} = \frac{2x}{x^2\ln 10 =}\frac{2}{x\ln 10}$$

11.9 Fonctions exponentielles de base a

11.9.1 Fonctions exponentielles de base a – Nouvelle formulation

En tenant compte de ce qui précède, on a

$$a^x = (e^{\ln a})^x \qquad \text{car} \;\; a = e^{\ln a}$$

et comme

$$(e^{\ln a})^x \;\; = e^{x\ln a}$$

on obtient une nouvelle formulation de la fonction exponentielle de base $a > 0$

$$y = a^x = e^{x\ln a}$$

Remarque 10 *La fonction* $x \longmapsto a^x$ *est donc la composée des fonctions* $x \longmapsto x.\ln a$ *et* $x \longmapsto e^x$

11.9.2 Fonctions exponentielles de base a – Dérivation

Sachant que $y = a^x = e^{x\ln a} = e^{u(x)}$, on a Thus,

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{x\ln a}) = (\ln a)e^{x\ln a} = (\ln a)a^x$$

11.10 Fonctions puissances

11.10.1 Fonctions puissances – Définition

Dèfinition 8 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *La fonction puissance est la fonction définie par*

$$x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha\ln x}$$

Son domaine de définition est donc le domaine de la fonction $\ln$ *qui est* $]0, +\infty[$.

11.10.2 Fonctions puissances – Dérivée

En tenant compte de la définition on obtient facilement la dérivée

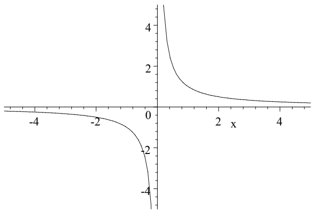
$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} = \tfrac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x}$$

1. Si $\alpha > 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = 0$;
2. Si $\alpha < 0$ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} = +\infty$.

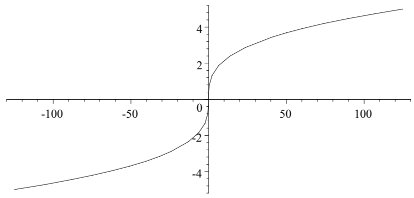
Remarque 11 *Notons au passage que* ∞^0 , 0^0 *et* 1^{∞} *sont des formes indéterminées.*

11.10.3 Fonctions puissances – Graphes

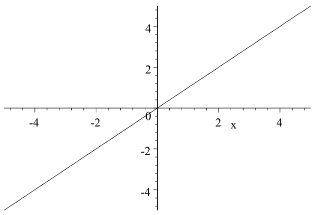
Distinguer les cas : $\alpha < 0$, $0 < \alpha < 1, \alpha = 1$, $\alpha > 1$.



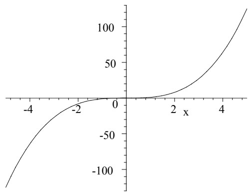
$y = x^{-1}$



$y = x^{\frac{1}{3}}$



$y = x$



$y = x^3$

11.11 Comparaison des croissances

Pour les fonctions ci-dessus, on a les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} \longrightarrow 0 & (\alpha > 0) & \text{(la puissance l'emporte sur le logarithme)} \\
\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^{x}}{x^{\alpha}} \longrightarrow +\infty & (\alpha > 0, a > 1) & \text{(l'exponentiel l'emporte sur la puissance)} \\
\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^{x}}{\ln x} \longrightarrow +\infty & (a > 1) & \text{(l'exponentiel l'emporte sur le logarithme)}
\end{array}$$