Rappels :
Notions d'ensembles et calcul dans $\mathbb{R}$

B. Aoubiza
Département GTR

18 septembre 2002

Table des matières

Chapitre 1

Rappels : Notions d'ensembles et calcul dans $\mathbb{R}$

La formulation des mathématiques doit être précise et abbrégée. Pour atteindre ce but, le language mathématique emploit des symbols (il ne faut pas trop en abusé) et des formules. Dans ce chapitre, on rapelle quelques éléments et notations de base.

1.1 Notion d'ensembles

Les ensembles sont les fondements des mathématiques. Il est important d'avoir une bonne base de compréhension des ensembles, on donne dans ce paragraphe des notions élémentaires qui seront très utiles pour la suite de l'analyse.

1.1.1 Notion d'ensembles – Définition

Il est difficile de donner une définition précise d'un emsemble, néanmoins, on peut dire qu'**un ensemble est une collection d'objet choisis à partir d'un univers**. L'univers dépend du context.

Exemples

1. L'ensemble des nombres réels est habituellement noté $\mathbb{R}$, l'ensemble des entiers se note $\mathbb{Z}$ et l'ensemble des entiers naturels se note $\mathbb{N}$.
2. L'écriture
$$\{2, -1, 7\}$$
veut dire l'ensemble dont les éléments sont 2, -1 et 7.
3. L'ensemble des solutions de l'équation $(x-2)(x-5) = 0$ est l'ensemble dont les éléments sont 2 et 5. Cet ensemble s'écrit
$$\{2, 5\}.$$
On peut aussi l'écrire comme
$$\{x \mid x = 2 \text{ ou } x = 5\}.$$
4. L'écriture $[2, 5]$ veut dire l'ensemble de tous les nombres x satisfaisant l'inégalité $2 \leq x \leq 5$. Ainsi
$$[2, 5] = \{x \mid x \text{ est un réel tel que } 2 \leq x \leq 5\}.$$
5. L'ensemble n'ayant aucun élément est appelé ensemble vide et se note $\emptyset$.

6. Etant donné un objet quelconque x, l'ensemble ayant un seul élément s'écrit $\{x\}$ et est appelé **singleton** x.

Remarque 1 *Un ensemble peut être défini par la donnée de tous ces éléments, par exemple*

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ou par la description de ses éléments à travers une propriété caractéristique

$$\begin{aligned} S &= \{\textit{nombres entiers de } 1 \textit{ à } 10 \textit{ inclu}\} \\ &= \{x \in N \textit{ tel que } 1 \leq x \leq 10\} \end{aligned}$$

On écrit
- $x \in S$ si x est un élément de S ou tout simplement : x est dans S
- $x \notin S$ si x n'est pas un élément de S ou tout simplement : x n'est pas dans S

Par exemple, $0 \in \mathbb{N}$ signifie que 0 est un entier naturel ; $\pi \notin \mathbb{Q}$ signifie que $\pi = 3.1415926535 \cdots$ n'est pas un nombre rationnel.

1.1.2 Notion d'ensembles – Ensembles usuels

Les ensembles usuels (connus avec leurs symbole) sont :
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$: esemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$:ensembles de entiers ;
- $\mathbb{Q} = \{p/q : p, q \in \mathbb{Z}\}$: ensemble des rationnels ;
- $\mathbb{R}$: ensemble des réels ;
- $\emptyset$: ensemble vide.

1.1.3 Ensembles – Opérations sur les ensembles

On peut comparer des ensembles : Si A et B sont deux ensembles, alors :
- $A \subset B$: A est un sous-ensemble de B ce qui signifie que tout élément de A est élément de B.
  Lire : A est inclu dans B

Exemple 1 *Lensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}$ *est inclus dans l'ensamble des entiers* $\mathbb{Z}$ *c-à-d :* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

- $A = B$: A et B ont les même éléments i.e $A \subset B$ et $B \subset A$.
  Lire : A est égale à B

On peut former de nouveaux ensembles
- $A \cup B$: est l'ensemble des éléments de A ou (et) de B.
  Lire : A union B
- $A \cap B$: est l'ensemble des éléments commun à A et à B.
  Lire : A interne B
- $A \backslash B$: est ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B.
  Lire : A est moins B
- C_A : ensemble de tous les éléments qui n'appartiennent pas à A.
  Lire : complémentaire de A
- $A \times B$: ensemble de tous les couples (a, b) où a est un élément de A et b est un élément de B.
  Lire : A produit B

On peut écrire en particulier
$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour le produit de l'ensemble des réels avec lui même. Les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sont les point du plan réel.

Et on a la définition suivante

Définition 1 *Deux ensembles sont disjoints si* $A \cap B = \emptyset$ *(ensemble vide).*

Exemple 2 *On considère les ensembles suivants :*
$E = \{x : x = 2n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$
$O = \{x : x = 2n + 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$
$A = \{x \in R : -4 < x < 3\}$
$B = \{x \in R : -1 < x < 7\}$
$I = \{x \in R : x^2 = -2\}$

1. *Dire, en phrases, ce que sont les ensembles E, O et I.*
2. *Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ et C_A.*
3. *Déterminer $O \cup E$, $O \cap I$ et C_I*

Les ensembles peuvent être combinés en utilisant les opérations précédentes.

Proposition 1 *(lois de distributivité)*
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Preuve. La preuve s'obtient facilement en utilisant des graphes de Venn. cependant, ceci ne donne pas une démonstration mathématique rigoreuse. Mais avant de développer une preuve, il est nécéssaire de former une image des hypothèses, des conclusions et des conséquences du théorème. Pour ceci, le digramme de Venn peut être d'une aide précieuse. Voir qcm pour la pratique du diagramme de Venn. ■

Il y a plusieur théorème liés aux opérations ensembliste. Un résultat particulièrement intéréssante est le théorème de Morgan ou lois de Morgan :

Théorème 1 *(Lois de Morgan)*
$comp(\bigcap_j A_j) = \bigcup_j (comp(A_j)$ *le nombre des ensembles est quelconque.*
$comp(\bigcup_j A_j) = \bigcap_j (comp(A_j)$

Preuve. A faire en exercice ■

1.2 Ensemble des nombres réels

Les nombres réels sont d'un usage habituel dans la vie courante. Chaque fois qu'on veut quantifier un objet on utilise des nombres réels. Comme vous le savez, on définit des opérations d'addition $(+)$ et de multiplication $(\cdot)$ sur ces nombres. En d'autres termes, pour deux réels a et b, la somme $a+b$ et le produit $a \cdot b$ sont deux nombres réels définis de manière unique. Noter qu'il y a deux nombres réels particuliers qui sont zéro (0) et un (1).
Propriétés des nombres réels :

Commutativité :	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Associativité :	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(bc) = (ab)c$
Elément neutre :	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

Pour tout réel a, il existe un réel, noté $-a$, et qu'on appelle l'opposé de a, tel que

$$\textit{Opposé :} \qquad a + (-a) = 0 = (-a) + a$$

Soustraction, notée $a - b$, est définie comme suit :

$$a - b = a + (-b)$$

Pour tout réel $a \neq 0$, il existe un réel, noté $\frac{1}{a}$ ou $1/a$ ou a^{-1}, et qu'on appelle l'inverse de a, tel que

$$\textit{Inverse :} \qquad a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 = \left(\frac{1}{a}\right)a$$

Division, notée $a \div b$ ou $\dfrac{a}{b}$ ou a/b, où $b \neq 0$, est définie comme suit :

$$a \div b = \frac{a}{b} = a/b = a\left(\frac{1}{b}\right) = ab^{-1}$$

Finalement, il y a une propriété liant l'addition et la multiplication :

$$\textit{Distributivité :} \qquad a(b+c) = ab + ac \qquad (a+b)c = ac + bc$$

1.2.1 Types de nombres réels

Les nombres réels sont classés en différentes catégories : entiers, rationnels et irrationnels.

Entiers

Entiers positifs, qu'on appelle aussi entiers naturels

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Entiers négatifs :

$$\ldots, -4, -3, -2, -1$$

Enfin zéro 0 est un entier.

Rationnels

Pour tous réels a et b, avec $b \neq 0$, le rapport $\dfrac{a}{b}$ est appelé *nombre rationnel*. Exemples : $\frac{4}{5}, \frac{121}{54}, -\frac{16}{31}$

Irrationnels

Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés *irrationnels*. Exemples : $\pi, \sqrt{2}\ , \cdots$.

Remarque 2 *Comment distinguer les rationnels et les irrationnels ?*
L'écriture sous forme décimale d'un rationnel :
se termine : exemple $\frac{1}{4} = 0.25$
ou elle a une forme périodique : exemple $\frac{1}{7} = 0.\underbrace{142\,857}\,\underbrace{142\,857}...$
Un irrationnel ne peut avoir l'une des deux formes ci-dessus.

1.2.2 Puissances et racines — Définitions

En plus des opérations arithmétiques de bases sur les réels $(+, -, \cdot, \div)$, il existe d'autres opérations importantes en pratiques telles que puissance, racine et logarithme qui sont les plus celèbres.

– Etant donné un *nombre* a et un *entier positif* n, la *puissance d'ordre* n de a est définie par

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \bullet \cdots \bullet a}_{n \text{ fois}}$$

Remarque 3 *Dans l'expression* a^n, *le nombre* a *s'appelle la* base *et le nombre* n *est appellé la* puissance *ou* exposant.

Exemple 3

$$\begin{aligned} 5^2 &= 5 \cdot 5 = 25 \\ 5^3 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \\ 5^4 &= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \end{aligned}$$

Voici quelques extentions de la définition ci-dessus.

– Pour tout *nombre réel* $a \neq 0$, on a :

$$a^0 = 1$$

– Si n est *entier positif* , alors :

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

– Si a est un *nombre positif* et n est *entier positif*, alors :

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} = b \quad \text{signifie} \quad b^n = a \text{ où } b > 0.$$

Noter que le nombre $\sqrt[n]{a}$ s'appelle racine $n^{ième}$ de a.

– si a est un *nombre négatif* et n est un *entier positif impaire*, alors :

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} = b \quad \text{signifie} \quad b^n = a.$$

Remarque 4 *Noter qu'on ne peut pas définir $a^{1/n}$ pour a* réel négatif *et n* entier positif paire. *On verra que c'est possible pour* nomnres complexes.

Exemple 4 *- Noter que la racine carrée de 4 est 2 et non -2 c'est-à-dire $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$.*

- $(-8)^{1/3} = -2$
- *Toutefois,* $(-2)^{1/2}$ n'est pas *définie. (La racine carrée d'un nombre négatif n'est pas un nombre réel.)*

– Si $a^{1/n}$ est la racine $n^{ième}$ de a et m est un *entier* (positif ou négatif), alors :

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m$$

Remarque 5 *L'ordre du calcul n'a pas d'importance c'est-à-dire*

$$a^{m/n} = (a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n}$$

Exemple 5 *Calculons $4^{3/2}$ et $(-8)^{2/3}$, $4^{-3/2}$ et $(-8)^{-2/3}$*

$4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = 2^3 = 8$

$(-8)^{2/3} = [(-8)^{1/3}]^2 = (-2)^2 = 4$. *(Attention,* $(-2)^{3/2}$ n'est pas *définie)*

$4^{-3/2} = (4^{1/2})^{-3} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

$(-8)^{-2/3} = [(-8)^{1/3}]^{-2} = (-2)^{-2} = \dfrac{1}{(-2)^2} = \dfrac{1}{4}$. *(Attention,* $(-2)^{-3/2}$ n'est pas *définie)*

– Tout *nombre irrationnel* r peut être approcher de plus en plus par une suite de *nombre rationnel* $r_1, r_2, r_3, r_4, \cdots$

Si a est un *réel positif* et r est un *entier positif*, alors

a^r peut être approcher de plus en plus par une suite de *nombre* $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, a^{r_4}, \cdots$

Exemple 6 *La racine carrée de 2 ($\sqrt{2}$) peut être approcher de plus en plus par une suite :*

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ 1.41421,\ 1.414213,\ 1.4142135, \cdots$$

Ainsi $3^{\sqrt{2}}$ peut être approcher de plus en plus par une suite :

$$\begin{aligned}
3^{1.4} &= 4.655\,536\,722\\
3^{1.41} &= 4.706\,965\,002\\
3^{1.414} &= 4.727\,695\,035\\
3^{1.4142} &= 4.728\,733\,930\\
3^{1.41421} &= 4.728\,785\,881\\
3^{1.414213} &= 4.728\,801\,466\\
3^{1.4142135} &= 4.728\,804\,064
\end{aligned}$$

1.2.3 Puissances et racines — Propriétés

Si m et n sont des entiers positifs, (sous condition de validité) on a :

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (x^m)^n = x^{mn} \quad (xy)^m = x^m y^m \quad (\frac{x}{y})^m = \frac{x^m}{y^m}$$

1.2.4 Puissances et racines — Formule du binôme

Triangle de Pascal

Soient a et b deux nombres et soit n un entier positive. On peut facilement développer $(a+b)^2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

On peut aussi facilement développer $(a+b)^3$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^3 + b^3$$

Mais le développement devient factidieux par la suite.

Le triangle de Pascal permet de trouver le développement de $(a+b)^n$ d'une manière simple pour $n \geq 2$.

$n=0$							1							
$n=1$						1		1						
$n=2$					1		2		1					
$n=3$				1		3		3		1				
$n=4$			1		4		6		4		1			
$n=5$		1		5		10		10		5		1		
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1	

Triangle de Pascal

Comment déterminer la ligne suivant ? Chaque ligne commence par 1 et se termine par 1 et chaque nombre de l'intérieur est la somme des deux coefficients juste au dessus. Ainsi, pour $n = 7$, les coeficient sont 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

Exercice 1 *Déterminer la ligne pour* $n = 8$?

Utilisation du triangle de Pascal Pour chaque n, les nombres du triangle donnent les coefficients du développement de $(a+b)^n$. Par exemple, pour $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

on a utilisé les coefficients de la ligne 2. (La ligne 2 est 1 2 1). De la même manière, en utilisant les coefficients de la ligne 3, on obtient

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (x+2)^3 &= 1x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \end{aligned}$$

en utilisant les coefficients de la ligne 4, on obtient

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

et

$$\begin{aligned}(p+3)^4 &= p^4 + 4p^3 \cdot 3^1 + 6p^2 \cdot 3^2 + 4p \cdot 3^3 + 3^4 \\ &= p^4 + 12p^3 + 54p^2 + 108p + 81\end{aligned}$$

Exercice 2 *En utilisant le triangle de Pascal donner le développement de* $(c+3)^5$ *et de* $(a-1)^4$.

Noter que, dans les termes successif du développement ci-dessus, la valeur de l'exposant de a décroit de 1 et celui de b croit de 1. *Toujours*, la somme des exposants est égale à la puissance de la somme $(a+b)$. Dans l'exemple $(p+4)^4$ la somme des exposants est égale 4.

Notation factorielle

Pour un entier positif, on note :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \bullet \cdots \bullet n$$

par convention

$$0! = 1$$

On lit : "n factoriel".

Exemple 7 *Par exemples,*

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

Théorème du binôme

En introduisant les *coefficients* définis par

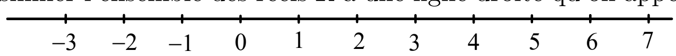
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

On peut énoncer le théorème du binôme suivant :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n a^0 b^n$$

1.2.5 Droite des réels

Notons qu'on peut assimiler l'ensemble des réels $\mathbb{R}$ à une ligne droite qu'on appelle la droite des réels.



Cette droite est orientée de gauche à droite.

1.2.6 Inégalités

Les inégalités permettent de décrire la relation entre les nombres réels. Notons qu'un nombre réel est positif si et seulement si il est le carré d'un autre réel non nul. En terme de symbol :

$$"x > 0" \iff "\text{il existe } y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y \neq 0 \text{ et } x = y^2"$$

Soient a et b deux réels.

$a < b$	Lire	a est strictement inférieur à b	$a > b$	Lire	a est strictement supérieur à b
	c-à-d	$b - a > 0$ soit $b - a$ positif		c-à-d	$b - a < 0$ soit $b - a$ négatif
$a \leq b$	Lire	a est inférieur ou égale à b	$a \geq b$	Lire	a est supérieur ou égale à b
	c-à-d	$a < b$ ou $a = b$ l'un ou l'autre		c-à-d	$a > b$ ou $a = b$ l'un ou l'autre

Remarque 6 *La relation "$\leq$" est une relation d'ordre totale dans* $\mathbb{R}$. *C'est-à-dire que pour tout choix de a, b et c dans $\mathbb{R}$, on a :*

- $a \leq a$
- *si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = c$;*
- *si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$;*
- *on a l'une des inégalités $a \leq b$ ou $b \leq a$.*

Inégalités : propriétés fondamentales

Soient a, b, c et x des nombres réels. On a les propriétés fondamentales suivantes :

1. On a l'une des trois situations : $a < b$ ou $a = b$ ou $b < a$ et rien d'autre.
2. Si $a < b$ et $b < c$ alors $a < c$.
3. Si $a < b$ alors $a + x < b + x$.
4. Si $a < b$ et $x > 0$ alors $ax < bx$. Cette propriété signifie qu'en multipliant des deux côtés par un nombre positif l'inégalité ne change pas de sens.

Inégalités : quelques conclusions

1. Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Alors, pour tout nombre x on a $a - x < b - x$.
   En effet, comme $a + (-x) < b + (-x)$ on a $a - x < b - x$.
   Ainsi, par exemple, l'inéqualité $x + 2 < 5$ est équivalente à
   $$(x + 2) - 2 < 5 - 2$$
   ce qui donne $x < 3$.
2. Soient a et b tels que $a < b$ et $x < 0$. Alors $bx < ax$.
   En effet, comme $-x > 0$ on sait que $a(-x) < b(-x)$ qu'on peut écrire $-ax < -bx$. En ajoutant des deux côtés ax puis bx on obtient $bx < ax$. Cette propriété signifie qu'en multipliant des deux côtés par un nombre négatif l'inégalité change de sens.
3. Si x est un réel non nul, alors $x^2 > 0$.
   En effet,
   - si $x > 0$, en multipliant des deux côtés de l'inégalité $0 < x$ par le nombre positif x on obtient $0x < xx$. Par conséquent on a $0 < x^2$.
   - et si $x < 0$, en multipliant des deux côtés de l'inégalité $x < 0$ par le nombre négatif x, et en changeant le sens de l'inégalité on obtient $xx > 0x$. On a donc $x^2 > 0$.

1.3 Résolution des équations

Dans ce chapitre on s'intéresse à la résolution de certains types d'équations à une ou plusieurs inconnues.

1.3.1 Résolution des équations – Définitions de base

Une équation est une formulation qui exprime que deux quantités sont égales.

Exemple 8 - *La formulation $2x - 6 = 0$ est une équation.*
- *L'expression* $\left(\frac{a}{b} - \frac{a+b}{2a}\right)\left(\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+ab} - \frac{a^2-ab+b^2}{ab-a^2}\right)$ *n'est pas une équation.*

Déterminer la **solution** d'une équation dont l'inconnue est x signifie déterminer l'ensemble de toutes les valeurs de x vérifiant l'équation.

Exemple 9 *L'équation* $2x - 6 = 0$ *a pour solution* $x = 3$. *Autrement, l'équation* $2x - 6 = 0$ *a pour ensemble de solutions* $S = \{3\}$.

Exemple 10 *Comme l'équation* $(x-3)(x-1) = 0$ *est vérifiée si et seulement si* $x = 1$ *ou* $x = 3$, *celle-ci a pour ensemble de solutions* $S = \{1, 3\}$.

Exemple 11 *L'équation* $x(x-2) = x^2 - 2x$ *est vérifiée pour tout réel* x, *elle a donc pour ensemble de solutions* $S = \mathbb{R}$.

Exemple 12 *L'équation* $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 8$ *est impossible. Donc* $S = \emptyset$. *Attention on ne peut pas écrire* $x = \emptyset$.

1.3.2 Equations linéaires et quadratiques

Définitions

Dans chacune des équations considérées, l'inconue est x :

Equation linéaire	$ax + b = 0$	a et b sont donnés avec $a \neq 0$
Equation quadratique	$ax^2 + bx + c = 0$	a, b et c sont donnés avec $a \neq 0$.
Equation cubique	$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$	a, b, c et d sont donnés avec $a \neq 0$.

La solution de l'équation linéaire est, bien sur, $x = -\frac{b}{a}$. Comme vous le savez, les équations quadratiques ne sont pas difficile à résoudre. Par contre, les équations d'ordre supérieur sont difficile à résoudre sauf pour certains cas très particuliers.

Résolution des équations quadratiques par factorisation

L'idée de cette méthode est basée sur le fait que si u et v sont deux nombres donnés, alors le produit uv ne peut être nul que si u et (ou) v est nul.

Exemple 13 *Soit à résoudre l'équation*

$$(2x-5)(x+3) = 0.$$

Comme cette équation est sous forme d'un produit, ce dernier ne peut être nul que si l'un ou les deux facteurs l'est. Donc $2x - 5 = 0$ *ou (et)* $x + 3 = 0$. *Par suite* $x = \frac{5}{2}$ *ou* $x = -3$.

Exemple 14 *La méthode de résolution par factorisation peut s'étendre à des équations de degré supérieur. Soit à résoudre l'équation*

$$(x-2)^3 (3x+7)(2x-5)^4 = 0$$

Il est évident que ses solutions sont $x = 2$, $x = -\frac{7}{3}$ *ou* $x = \frac{5}{2}$.

Exemple 15 *Dans cet exemple on considère la résolution de l'équation*

$$(x-7)(x+3) = -24.$$

Attention, il n'est y a pas de raisons pour dire que $x - 7 = -24$ *ou* $x + 3 = -24$.

On développe le premier membre de l'équation, on obtient $x^2 - 4x - 21 = -24$, *on rajoute des deux côtés* 24, *ce qui donne* $x^2 - 4x + 3 = 0$ *dont les solutions sont* $x = 3$ *ou* $x = 1$.

Exercices

Résoudre les équations suivantes :

1. $2x^2 + 5x - 12 = 0$
2. $7x - 3 - 2x^2 = 0$
3. $(2x - 7)^2 = 0$
4. $(2x - 6)^4 (x - 2)^{77} = 0$
5. $\left(x^2 - x - 6\right)^3 \left(3x^2 - 13x - 10\right)^{100} = 0$
6. $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0$
7. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$
8. $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$
9. $x^7 - 7x^4 - 8x = 0$
10. $\left(2x^6 - 17x^3 + 8\right)\left(9x^4 - 226x^2 + 25\right) = 0$
11. $(x + 4)(x - 1) = 6$
12. $(x - 1)(x - 2)^4 - 5(x - 1)(x - 2)^2 - 36(x - 1) = 0$

Exercices complémentaires

1. Soient a et b deux réels donnés tels que $a \neq 1$ et $b \neq 1$. On considère
$$c = \frac{a + b}{1 + ab}.$$
Expliquer pourquoi $c \neq 1$.
2. Soient a et b deux réels donnés tels que $a \neq 1$ et $b \neq 1$. On considère
$$c = \frac{a + b}{1 + ab}.$$
Expliquer pourquoi $c \neq -1$.
3. Utiliser la technique de factorisation pour déterminer la solution de chacune des équations cubiques suivantes :
   (a) $x^3 + 2 + 4 - 6x = 0$
   (b) $x^3 + 3 + 9 - 9x = 0$
   (c) $x^3 - 2 + 4 + 6x = 0$
   (d) $x^3 - 5 + 25 + 15x = 0$
   (e) $x^3 + 12 + 12x = 0$
   (f) $x^3 + 20 - 12x = 0$

Résolution d'équations sous formes de carré complet

Une équation est sous forme de **carré complet** s'il peut s'écrire sous la forme
$$(x - c)^2 = d$$
où c et d sont des nombres donnés. Noter que ce type d'équation est quadratique car il a la forme $x^2 - 2cx + c^2 - d = 0$.

Exemple 16 *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$(x-2)^2 = 9$$

Pour déterminer les solutions de cette équation, il suffit de noter que

$$(x-2)^2 = 9 \text{ est équivalent à } \begin{array}{c} x-2=-3 \\ ou \\ x-2=3 \end{array}$$

on déduit donc que $x=-1$ *ou* $x=5$.

Exemple 17 *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$(x-3)^2 = 8,$$

On a donc notice that this equation holds if either $x-3=-\sqrt{8}$ *or* $x-3=\sqrt{8}$. *Since* $\sqrt{8}=\sqrt{(4)(2)}=2\sqrt{2}$, *the solution of the equation is that either* $x=3-2\sqrt{2}$ *or* $x=3+2\sqrt{2}$. *We can write this solution more briefly as* $x=3\pm 2\sqrt{2}$.

Exemple 18 *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$(x-3)^2 = 0,$$

il suffit de noter que

$$(x-3)^2 = 0 \text{ est équivalent à } x-3=0$$

Exemple 19 *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$(x-3)^2 = -4$$

Cette équation n'a pas de solution car le membre de gauche est positif (carré) pendant que le membre de droite est négatif ce qui est impossible. Donc $S=\emptyset$.

Exercices

1. $(x-1)^2 = 1$
2. $\left(x+\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$
3. $\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$
4. $\left(x-\frac{4}{7}\right)^2 = 0$
5. $\left(x^2-\frac{13}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$
6. $(x+1)^2 = -9$
7. $\left(x^2-2\right)^2 = 49$
8. $(x-2)^2 = 9(2x+3)^2$
9. $(x-2)^2 = -4(x-3)^2$
10. $\left(\frac{2}{x-3}-5\right)^2 = 9$

Technique de "complèter le carré"

On peut toujours mettre une équation quadratique sous forme de carré complet. Voici quelques exemples illustratifs.

Exemple 20 *Ecrire l'équation suivante sous forme de carré complet :*

$$x^2 - 6x + 7 = 0$$

- On formule l'équation comme suit

$$x^2 - 6x = -7$$

- On cherche un nombre ? tel

$$(x-?)^2 = -7+?^2.$$

- Le développement du premier membre donne

$$x^2 - 2?x+?^2$$

- Et donc le terme $-2?x$ doit être égale à $-6x$. Par suite le nombre ? cherché n'est autre que 3 et l'équation s'écrit

$$(x-3)^2 = -7 + 3^2 = 2$$

dont les solutions s'obtiennent facilement : $x = 3 \pm \sqrt{2}$.

Exemple 21 *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$x^2 + 5x - 1 = 0$$

Pour cela, on complète le carré :

$$x^2 + 5x = 1$$

on cherche un nombre ? tel

$$(x+?)^2 = 1+?^2.$$

soit

$$x^2 + 2?x+?^2 = 1+?^2$$

le terme $2?x$ doit être égale à $5x$. Le nombre ? cherché est $\frac{5}{2}$ d'où

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$$

est on déduit que $x + \frac{5}{2} = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$, autrement

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}.$$

Exemple 22 *Soit à résoudre l'équation suivante :*

$$5x^2 - 6x - 1 = 0$$

Complèter le carré :

$$x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}$$

on cherche un nombre ? tel

$$(x-?)^2 = \frac{1}{5}+?^2.$$

De la même manière que ci-dessus, on obtient le nombre ? cherché qui est $\frac{3}{5}$ et l'équation devient

$$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}$$

et on déduit que $x = \frac{3\pm\sqrt{14}}{5}$.

Exercices

En utilisant la technique de factorisation ou de "complèter le carré", déterminer les solutions des équations suivantes :

1. $x^2 - 4x - 2 = 0$
2. $3x^2 + 12x + 1 = 0$
3. $3x^2 - 5x - 1 = 0$
4. $x^2 - 6x + 10 = 0$
5. $\left(x^2 + x\right)^2 - 8\left(x^2 + x\right) + 12 = 0$
6. $\left(2x^2 - 5x\right)^2 - \left(2x^2 - 5x\right) - 6 = 0$
7. $2\left(x^2 - x\right) = \dfrac{1}{x^2 - x} + \dfrac{7}{2}$
8. $\dfrac{x^2 - 5x}{6} + \dfrac{5}{3} + \dfrac{4}{x^2 - 5x} = 0$
9. $x^2 - 6x - 5 - \frac{36}{x^2-6x} = 0$

1.3.3 Formule quadratique

Comme la technique de "complèter le carré" s'applique à toutes les équations quadratiques, on l'applique à l'équation quadratique générale

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où a, b et c sont des nombres donnés avec $a \neq 0$.

On écrit l'équation ci-dessus sous la forme

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}.$$

Maintenant, on **complète le carré** en cherchant un nombre ?

$$(x-?)^2 = -\frac{c}{a}+?^2$$

En développant le premier memebre on obtient

$$x^2 - 2?x+?^2$$

et donc le terme $-2?x$ doit être égale à $\frac{b}{a}x$. Par suite le nombre ? cherché n'est autre que $-\frac{b}{2a}$ et l'équation s'écrit

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

Qui après simplification s'écrit

$$\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Le comportement de cette équation dépend du signe du second membre $\frac{b^2-4ca}{4a^2}$ et donc du signe de b^2-4ac (positif, nul ou négatif). Ce qui donne les formules que vous connaîssez déjà.

Cas 1 *Si* $b^2 - 4ac \geq 0$ *(c'est la fameuse* Δ*) donc* $\frac{b^2-4ac}{4a^2} \geq$ *, l'équation*

$$\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

a deux solutions (qui peuvent être les mêmes si $\Delta = 0$*) :*

$$x - \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad ou \qquad x - \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

soit

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad ou \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Cas 2 *Si* $b^2 - 4ac < 0$ *pas de solutions réels.*

Exercices

1. Sachant que l'équation $x^2 - ax + 9 = 0$ a exactement une solution, déterminer la valeur de a.
2. Sachant que l'équation $x^2 + 12x + a = 0$ a exactement une solution, déterminer la valeur de a.

1.3.4 Equations fractionnelles

Certaines équations contenant des expressions fractionnelles peuvent aboutir à la résolution d'équations quadratiques. On élimine les fractions en multipliant des deux côtés par le dénominateur commun. Cependant, il faut être vigilant en procédant de cette manière. Considérons l'équation

$$\frac{3}{x+3} - 1 = \frac{2x}{x-2} - \frac{5(x+2)}{(x+3)(x-2)}.$$

En multipliant des deux côtés par $(x+3)(x-2)$, on obtient l'équation

$$3(x-2) - (x+3)(x-2) = 2x(x+3) - 5(x+2)$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$(3x+5)(x-2) = 0.$$

dont les solutions sont $x = -\frac{5}{3}$ ou $x = 2$. Mais attention, la solution $x = 2$ doit être rejeté car elle annule le dénominateur de l'équation du départ. D'où $S = \left\{-\frac{5}{3}\right\}$.

Exercices

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{x+3}{x-3} + \dfrac{x-3}{x+3} = \dfrac{5}{2}$
2. $\dfrac{3}{1-u} + \dfrac{6}{1+u} = \dfrac{7}{u-2}$
3. $\dfrac{4-u}{4-u^2} = \dfrac{u}{u-2} + 2$
4. $\dfrac{u}{1-u} - \dfrac{3}{u^2-1} = \dfrac{u+4}{2(u+1)}$
5. $\dfrac{2}{5(x-2)} + \dfrac{x+1}{4-x^2} = \dfrac{1-x}{x+2}$
6. $x^2 - 6x - 8 = 0$
7. $1 = \dfrac{9}{x+5} + \dfrac{3}{x-2} + \dfrac{1-3x}{(x-2)(x+5)}$

1.3.5 Equations contenants des racines

Dans certains cas, ce type d'équations peut se transformer en équations linéaires ou quadratiques par application d'une puissance convenable.

Exemple 23 *Pour résoudre l'équation*

$$\sqrt[3]{x} = 2$$

en applique la puissance 3 *des deux côtés on obtient* $x = 8$.

Le principe de cette méthode est basé sur la propriété suivante :

The key to this method is the fact that if a *and* b *are any numbers then the condition*

$$a = b \text{ est équivalent à } a^3 = b^3.$$

Exemple 24 *Pour résoudre l'équation*

$$\sqrt{x-4} + x = 16$$

on l'écrit sous la forme

$$\sqrt{x-4} = 16 - x$$

en appliquant la puissance 2 *des deux côtés on obtient*

$$x - 4 = (16 - x)^2$$

qui est une équation quadratique dont les solutions sont $x = 13$ *ou* $x = 2$. *Mais attention seule la deuxième solution convient à notre équation d'origine.* ***Cela vient du fait qu'il n'y a pas d'équivalence entre*** $a = b$ ***et*** $a^2 = b^2$. *Donc* $S = \{13\}$.

Exercices

Résoudre les équations suivantes. N'oublier pas de vérifier que les solutions trouvées sont bien solutions de l'équation d'origine.

1. $\sqrt{x-7} + x = \sqrt{x+4} + 31$
2. $x - \sqrt[3]{x+2} = 4$
3. $\sqrt[5]{x+17} + x = 17$
4. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} = \sqrt{x+22}$
5. $\sqrt{x+6} + \sqrt{2x+5} = 3$
6. $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} + \sqrt{x-2} = 5$
7. $\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 3x + 9} = x + 1$

1.4 Valeur absolue

1.4.1 Valeur absolue – Définition

La **valeur absolue** , notée $|x|$, d'un réel x est donnée par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 25 $|6| = 6$, $|0| = 0$ *et* $|-6| = -(-6) = 6$.

Il est à noter qu'on a la relation suivante :

$$|x| = \sqrt{x^2}.$$

Valeur absolue et distance

Le nombre $|x|$ peut être considérer comme étant la distance entre x et 0. Notons que pour $x \geq 0$ ou $x < 0$, le nombre $|x|$ est non négatif et qu $-|x|$ ou $|x|$ est égale à x.

$-|x|$ ________________ 0 ________________ $|x|$

$$\boxed{\text{En générale, la distance entre } a \text{ et } b \text{ est donnée par } |a-b|.}$$

Soient a un réel positif et x un nombre réel quelconque. La condition $|x| \leq a$ signifie que la distance de x à 0 est inférieure ou égale à a. un coup d'oeil sur la figure ci-dessous monte que le réel x qui se trouve entre $-a$ et a.

$-a$ ________________ 0 ________________ a

Autrement,

l'inégalité $|x| \leq a$ peut s'écrire $-a \leq x \leq a$.

1.4.2 Valeur absolue – Propriétés

Valeur absolue du produit

Soient x et y deux nombres réels. On a la propriété suivante :

$$|xy| = |x|\,|y|\,.$$

En effet, on peut déduire cette relation en notant que :

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x|\,|y|\,.$$

Valeur absolue d'une somme

Soient x et y deux nombres réels. On a la propriété suivante :

$$|x+y| \leq |x| + |y|\,.$$

En effet, à partir des inégalités

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x| \\ -|y| &\leq y \leq |y| \end{aligned}$$

on déduite que

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

qu'on peut écrire sous la forme

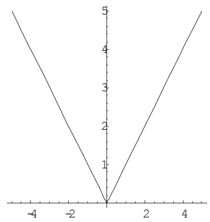
$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

d'où la propriété $|x+y| \leq |x| + |y|\,.$

Remarque 7 *La valeur abslue est une fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}^+$

Remarque 8 *Il est important de se rappeler que* $|a| \geq 0$, $|-a| = |a|$ *et* $|a-b| = |b-a|$

A partir de ces propriétés, on déduit le graphe de la fonction valeur absolue :



1.4.3 Valeur absolue – Distance entre deux réels

Quelle est la distance séparant le réel 2 du réel 9 ? En regardant la droite des réels on peut dire que cette distance est 7.

$$2 \text{ ———————— } 9$$

Quelle est la distance séparant le réel -3 du réel 11 ? De la même manière en regardant la droite des réels on peut dire que cette distance est 14.

$$-3 \text{ —— } 0 \text{ ———————— } 11$$

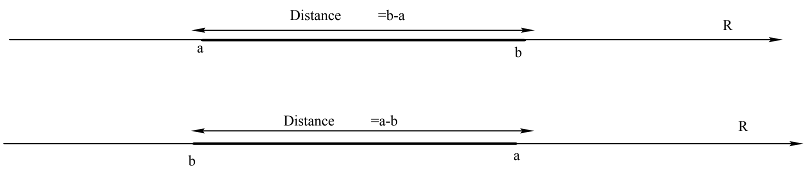
En générale, la distance entre deux nombres réels a et b est

$$\begin{array}{ll} b-a & \text{si } a \leq b \\ a-b & \text{si } b \leq a \end{array}$$

En tenant compte de la définition de la valeur absolue, la distance entre deux nombres réels a et b est donnée par

$$\text{Distance de } a \text{ à } b : \ |a-b|$$

Remarque 9 *Pour comprendre le rôle de la valeur absolue voir figure ci-dessous*



Exercice 3 *Calculer les distances de a à b puis de b à a*

1. $a = 6, b = \frac{-5}{2}$
2. $a = \frac{-5}{2}, b = 6$
3. $a = 3.4, b = 5$
4. $a = 5, b = 3.4$

Conclusion 1 *La distance de a à b est égale à la distance de b à a c-à-d :*

$$|a-b| = |b-a|$$

Exercice 4 *Calculer les quantités $|a-b| + |b-c|$ et $|a-c|$ puis les comparer.*

1. $a = 5, b = 2, c = 1$
2. $a = 2, b = 5, c = 1$
3. $a = 1, b = 2, c = 5$
4. $a = 5, b = 1, c = 2$
5. $a = 2, b = 1, c = 5$
6. $a = 1, b = 5, c = 2$

Conclusion 2 *On peut remarque qu'on a toujours*

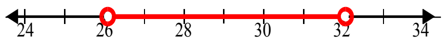
$$|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$$

1.5 Intervalles

Les intervalles sont des ensembles particuliers et ils jouent un rôle important en pratique. Ce sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Ils sont des ensembles solutions des inégalités et prennent différentes formes.

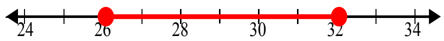
1.5.1 Intervalles — Finis

En pratique, il est habituel de travailler avec des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Par exemple, le prix d'une marchandise au cours d'une journée peut varier strictement entre 26 and 32. Cet sous-ensemble de $\mathbb{R}$ peut être décrit par :

$26 < x < 32$	$]26, 32[$	
inégalité	intervalle ouvert	graphe

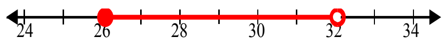
Les cercles vides indiquent que les nombres 26 et 32 ne font pas partis de l'ensemble.

Si le prix de la marchandise au cours d'une journé varie entre 26 and 32, on note ce sous-ensemble par

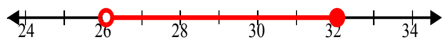
$26 \leq x \leq 32$	$[26, 32]$	
inégalité	intervalle fermé	graphe

Les cercles pleins indiquent que les nombres 26 et 32 font partis de l'ensemble.

Il y a deux autres sous-ensembles de $\mathbb{R}$ similaires à ceux ci-dessus qui sont donnés par

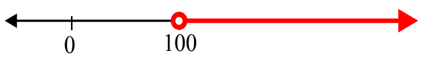
$26 \leq x < 32$	$[26, 32[$	
inégalité	intervalle ouvert à droite	graphe

et

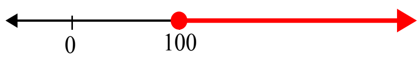
$26 < x \leq 32$	$]26, 32]$	
inégalité	intervalle ouvert à gauche	graphe

1.5.2 Intervalles — Infinis

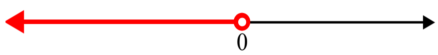
Il existe d'autres types importants d'intervalles qui sont définis par *une seule inégalité*. Par exemple, on sait que l'eau s'évapore si sa température dépasse 100° C. Cette température se formule ainsi

Inégalité	Intervalle	Graphe
$x > 100$	$]100, \infty[$	

Pour inclure la température 100° C dans l'ensemble, on écrit

Inégalité	Intervalle	Graphe
$x \geq 100$	$[100, \infty[$	

D'une manière similaire, on a

Inégalité	Intervalle	Graphe
$x < 0$	$]-\infty, 0[$	

Pour inclure 0 dans l'ensemble, on écrit

Inégalité	Intervalle	Graphe
$x \leq 0$	$]-\infty, 0]$	

Attention : les symboles ∞ et $-\infty$, sont appelés *plus l'infini* et *moins l'infini*, et **ne sont pas des nombres réels**.

Remarque 10 *Les écritures $]a, \infty], [-\infty, a], [-\infty, \infty], \cdots,$ n'ont pas de sens car les crochets implique que le nombre réel appartient à l'intervalle or ∞ n'est pas un nombre réel.*

Remarque 11 *Notons que*

$$\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$$

Exercice 5 *Mettre sous forme d'intervalles les ensembles suivants :*

1. *L'ensemble des réels non négatifs.*
2. *L'ensemble des réels strictement négatifs.*

1.5.3 Intervalles – Définition par la valeur absolue

Le but est de mettre en évidence la relation liant distance, inégalité et intervalle à l'aide de la fonction valeur absolue.

Soient a un réel donné et b un réel positif. L'ensemble des nombres x dont la distance à a est inférieure à b peut être décrit comme suit

$$\begin{array}{cc} |x-a| < b &]a-b, a+b[\\ \text{inégalité} & \text{intervalle ouvert} \end{array}$$

Ainsi,

$$|x-a| < b \text{ équivalent à } -b < x-a < b \text{ équivalent à } a-b < x < a+b$$

et

$$|x| < b \text{ est équivalent à } -b < x < b$$

L'ensemble des nombres x dont la distance à a est supérieure à b peut être décrit comme suit

$$\begin{array}{cc} |x-a| \geq b &]-\infty, a-b] \cup [a+b, +\infty[\\ \text{inégalité} & \text{union de deux intervalles} \end{array}$$

Ainsi,

$$|x-a| \geq b \text{ est équivalent à } x \leq a-b \text{ ou } x \geq a+b$$

Exercice 6 *Utiliser la notation d'intervalle pour décrire l'ensemble des solutions des inégalités :*

1. $|x-3| < 0.2$
2. $|x+4| < \frac{2}{7}$
3. $|2x-5| \leq 3$
4. $|2x-5| > 3$
5. $0 < |x-2| < \frac{1}{2}$

Exercice 7 *Déterminer les inégalités ayant pour solution les ensembles suivants :*

1. $]2, 6[$
2. $[3, 6]$
3. $]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

Exercice 8 *Déterminer l'inégalité ayant pour solution l'ensemble indiqué sur les graphes suivants :*

1. Donner le graphe de $]\frac{17}{5}, 3.9[$
2. Donner le graphe de $]-\infty, -2.1] \cup [3.4, +\infty[$

Remarque 12 *Une infinité de sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *ne sont pas des intervalles. Par exemple* $\mathbb{N}$ *n'est pas un intervalle.*

1.5.4 Milieu d'un intervalle

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et soit x le point milieu de l'intervalle $[a, b]$.

$$a\underline{\hspace{3cm}}x\underline{\hspace{3cm}}b$$

Afin de déterminer la formule donnant le nombre x, on remarque que les distances de x à a et de x à b sont les mêmes. Ainsi $x - a = b - x$ et par conséquent

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

1.6 Résolution des inéquations

1.6.1 Résolution des inéquations – exemples

Dans cette section, on étudie les inégalités simples (ou inégaliés de degré 1).

Exemple 26 *Soit à résoudre* $5 - 3x < 13$.

Solution 1 *- On soustrait* 5 *des deux côtés on obtient :* $-3x < 8$.
- Maintenant on divise par des deux côtés par le nombre non nul -3 *(n'oublier pas d'inverver le sens de l'inégalité), on obtient* $x > -\frac{8}{3}$.

Exemple 27 *Résolvons l'inégalité* $|x| < 3$.

Solution 2 *Rappelons que la condition* $|x| < 3$ *signifie que le réel* x *se trouve entre* -3 *et* 3.

$$-3\underline{\hspace{3cm}}0\underline{\hspace{3cm}}3$$

On déduit donc que $-3 < x$ *et* $x < 3$. *ce qui se résume en disant que* $-3 < x < 3$.

Exemple 28 *Cherchons les réels vérifiant l'inégalité* $|x - 3| \geq 2$.

Solution 3 *L'inégalité* $|x - 3| \geq 2$ *signifie que la distance de* x *à* 3 *est au moins égale à* 2 *et donc on a* $x - 3 \geq 2$ *ou* $x - 3 \leq -2$. *D'où à partir de la figure suivante :*

$$\underline{\hspace{2cm}}1\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2}3\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2}5\underline{\hspace{2cm}}$$

on déduit que les réels recherchés sont tels que $x \leq 1$ *ou* $x \geq 5$.

$$\underline{\hspace{2cm}}1\hspace{1.5cm}3\hspace{1.5cm}5\underline{\hspace{2cm}}$$

Exercices

1. La distance entre deux réels a et b est donnée par $|a-b|$. Cette formule est-elle valable si $a=-7$ et $b=-3$?
2. Déterminer un nombre x qui se trouve exactement au premier tiers, de gauche à droite, de l'intervalle $[-11,3]$.
3. Résoudre les inégalités suivantes :
   (a) $3x+2\leq 17$
   (b) $-3x+2\leq 17$
   (c) $3|x|+2\leq 17$
   (d) $|x-1|\leq 7$
   (e) $|x-1|\leq -2$
   (f) $|x-1|\geq -2$
   (g) $|x-1|\geq 2$
   (h) $2\leq |x-1|\leq 5$
4. Dessiner les figures puis résoudre l'inégalité $|x-1|<|x-5|$.
5. Soient a et b deux nombres réels en utilisant le fait que $(a-b)^2\geq 0$ déduire que
$$ab\leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}.$$

1.6.2 Résolution des inéquations – inéquations de degré supérieur

Dans cette section on propose quelques méthodes de résolution des inégalités de la forme

$$\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$$

où les expressions de $f(x)$ et $g(x)$ peuvent se mettre en facteurs linéaires.

Exemple : inégalité cubique

Exemple 29 *Soit à résoudre l'inégalité :*

$$(x-1)(2-x)(x+3)\leq 0.$$

Solution 4 *On écrit le membre de gauche comme* $L(x)=(x-1)(2-x)(x+3)$. *Tout d'abord on résoud l'*équation $L(x)=0$ *qui a pour solutions* $x=1$, $x=2$ *ou* $x=-3$.

Ainsi $L(x)$ *ne peut changer de signe qu'en ces trois points et on peut donc diviser la droite des réels comme suit :*

$$\underline{\qquad\quad} -3 \underline{\qquad\quad} 1 \underline{\qquad\quad} 2 \underline{\qquad\quad}$$

et on dresse le tableau des signes

x	$x<-3$	-3	$-3<x<1$	1	$1<x<2$	2	$x>2$
$L(x)$	*pos*	0	*nég*	0	*pos*	0	*nég*
Vraie ?	*non*	*oui*	*oui*	*oui*	*non*	*oui*	*oui*

Comme l'inégalité affirme que $L(x)$ *peut être négative ou nulle on conclut que l'inégalité est vérifiée si* $-3\leq x\leq 1$ *ou* $x\geq 2$. *Autrement*

$$S=[-3,1]\cup[2,\infty[.$$

Exemple : Inégalité fractionnelle

Exemple 30 *Soit à résoudre l'inégalité fractionnelle :*

$$\frac{(x-1)(x-3)^2}{(x-2)(x-5)} \geq 0.$$

Solution 5 *On pose* $L(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)^2}{(x-2)(x-5)}$. *On peut facilement remarquer que* $L(x)$ *ne peut changer de signe qu'aux points* 1, 2, 3 *et* 5. *On peut donc diviser la droite des réels comme suit :*

$$\underline{\qquad\qquad}1\underline{\qquad\qquad}2\underline{\qquad\qquad}3\underline{\qquad\qquad}5\underline{\qquad\qquad}$$

et on dresse le tableau des signes

x	$x<1$	1	$1<x<2$	2	$2<x<3$	3	$3<x<5$	5	$x>5$
$L(x)$	*nég*	0	*pos*	0	*nég*	0	*nég*	0	*pos*
Vraie ?	*non*	*oui*	*oui*	*imp*	*non*	*oui*	*non*	*imp*	*oui*

Ainsi l'inégalité est vérifiée si $1 \leq x \leq 2$ *ou* $x = 3$ *ou* $x \geq 5$. *Autrement*

$$S = [1, 2[\cup \{3\} \cup]5, \infty[.$$

Exercices

Résoudre les inégalités suivantes :

1. $\dfrac{x-3}{x+2} \geq 0$
2. $\dfrac{(x+2)^2}{x-3} \geq 0$
3. $\dfrac{(x^2-4x+5)(x-2)}{x-1} \leq 0$
4. $\dfrac{x-4}{(x-1)(x-2)} \geq 0$
5. $\dfrac{x-3}{x+1} \geq 1$
6. $\dfrac{3}{x+2} \geq \dfrac{2}{3-x}$

1.6.3 Résolution des inéquations – inéquations avec valeur absolue

Exemple 31 *Soit à résoudre l'inéquation suivante*

$$\frac{3}{|3x+7|} \geq 1$$

Comme la valeur absolue est toujours positive, $|3x+7| \geq 0$ *; et si* $3x+7 \neq 0$, *on peut multiplier des deux côtés par* $|3x+7|$ *sans que le sens de l'inégalité change*

$$3 \geq |3x+7| \quad ou \quad |3x+7| \leq 3$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
-3 &\leq 3x+7 \text{ et } 3x+7 \leq 3 \\
-10 &\leq 3x \text{ et } 3x \leq -4 \\
-\frac{10}{3} &\leq x \text{ et } x \leq -\frac{4}{3} \\
-\frac{10}{3} &\leq x \leq -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Attetion : n'oublier pas que $3x+7 \neq 0$; alors il faut exclure $x = -\frac{7}{3}$. La solution est

$$-\frac{10}{3} \leq x \leq -\frac{4}{3},\ x \neq -\frac{7}{3}$$

1.6.4 Résolution des inéquations – Inéquation quadratique

Une inéquation quadratique est une inéquation de la forme :

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \text{ ou } < 0$$

Exercice 9 *Soit*

$$f(x) = x^2 + x - 1$$

1. Pour quelles valeurs de x on a : $f(x) = 0$?
2. Pour quelles valeurs de x on a : $f(x) > 0$?
3. Pour quelles valeurs de x on a : $f(x) < 0$?

Conclusion 3 *:*

+++++++)	(−−−−−−−−−)	(+++++++
−2	0	1

Exercice 10 *Même exercice que précédement avec*

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

1.6.5 Résolution des inéquations – quelques conseils

Pour résoudre une inéquation du type

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \text{ ou } < 0$$

on procède **souvent** par étapes

1. Factoriser le dénominateur et le numérateur ;
2. Simplifier quand c'est possible :
   (a) Le signe d'une expression ne change pas s'il a un facteur toujours positif ;
   (b) Le signe d'une expression ne change pas quand on simplifie par un facteur qui apparaît au numérateur et au dénominateur (mais attention si le facteur s'annule) ;
   (c) Rappellons ceci :
      i. $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
      ii. $\sqrt{x} \geq 0$ et $\sqrt{x}$ est définit seulement pour $x \geq 0$

iii. $\ln x$ est définit pour $x > 0$

iv. Soit la fonction quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$.

A. Si $a > 0$ et $b^2 - 4ac < 0$ alors $ax^2 + bx + c > 0$ pour tout x.

B. Si $a < 0$ et $b^2 - 4ac < 0$ alors $ax^2 + bx + c < 0$ pour tout x.

3. Analyser chaque facteur pour déterminer où : $+, -, 0$ ou indéfini.
4. Construire un diagramme résumant les étapes précédentes
5. Utiliser le diagramme pour répondre à la question.

Exemple 32 *Résoudre l'inégalité suivante*

$$F(x) = \frac{(x-1)(x^4 + x^3)}{x^2 - 3x + 2} < 0$$

Solution 6 *:*

1. Pour quelles valeurs de x on a : $F(x) = 0$?
2. $F(x)$ n'est pas définie en $x = 1$ et $x = 2$
   le signe de $F(x)$ est le même que celui de

$$\frac{x(x+1)}{(x-2)}$$

3. Analyse des facteurs

Facteur	$(-)$	(0)	$(+)$	indéfini
x	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$	Jamais
$x+1$	$x < -1$	$x = -1$	$x > -1$	Jamais
$1/(x-2)$	$x < 2$	$x = 2$	$x > 2$	2

4. Caractérisation

					$x-2$
					$x+1$
					x
$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$	$(+)$	$F(x)$

-1 0 1 2

5. Solution : $F(x) < 0$ pour $x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[\cup]1, 2[$

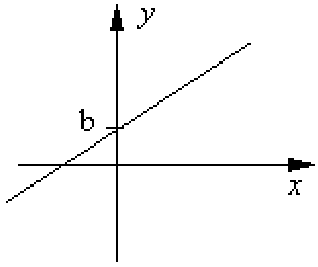
1.7 Courbes de base

Les cours de calcul mathématique font souvent apparaître des croquis de courbes. Si vous ne connaissez pas les propriétés des courbes simples, il faut s'attendre à de sérieuses difficultés avec celles qui sont complexes. Voici quelques propriétés de courbes simples :

1.7.1 Courbes de base – Droite

La droite de pente (ou coefficient directeur) a et qui rencontre l'axe Oy en b, a pour équation :

$$y = mx + b$$



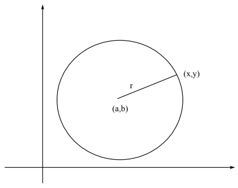
La droite de pente a et qui passe par le point (x_0, y_0) (d'abscisse $x = x_0$ et d'ordonné $y = y_0$), a pour équation :

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

1.7.2 Courbes de base – Cercle

Le cercle de rayon r est de centre $A(a, b)$ a pour équation :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



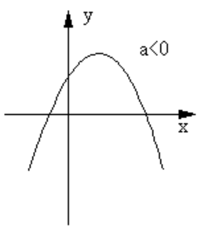
Noter que ce cercle est formé de tous les points qui se trouvent à la distance r du point A.

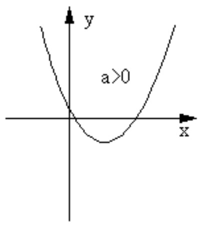
1.7.3 Courbes de base – Paraboles

– La parabole dont l'axe est parallèle à Oy a pour équation (*quadratique*)

$$y = ax^2 + bx + c$$

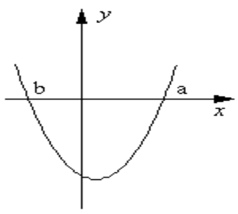
- si $a > 0$ la parabole s'ouvre vers le haut.
- si $a < 0$ la parabole s'ouvre vers le bas.
- Le sommet (maximum ou minimum) de la parabole est au point d'abscisse $x = -\dfrac{b}{2a}$.





– La parabole qui coupe l'axe Ox en $x = a$ et en $x = b$ a pour équation

$$y = c(x - a)(x - b)$$



– La parabole dont l'axe est parallèle à Ox a pour équation

$$x = ay^2 + by + c$$

si $a > 0$ la parabole s'ouvre vers la droite.
si $a < 0$ la parabole s'ouvre vers la gauche.
– Equation cubique

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

1.8 Notation d'une sommation

Soient a_i des nombres indixés par des entiers i, alors on écrit

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = \sum_{i=m}^{n} a_i$$

Exemple 33 *: Voici quelques exemples de sommation*

1. $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = \sum_{j=1}^{5} j^2$
2. $2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 = \sum_{i=1}^{4} (i+1)x^i$
3. $200 + 202 + 204 + 206 + 208 = \sum_{i=100}^{104} 2i = \sum_{k=0}^{4} (200 + 2k)$

Propriétés

1. $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{import=m}^{n} a_{import}$ (le nom de l'indice n'est pas important)
2. $\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i$ (regroupement des termes)
3. $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c \sum_{i=m}^{n} a_i$ (multiplication par une constante)
4. $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i$ où $m \leq p \leq n$ (briser une sommation)
5. $\sum_{i=m}^{m} a_i = a_m$
6. $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$, $\sum_{i=0}^{n} 0 = 0$
7. $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+p}^{n+p} a_{i-p}$ (Reindixation)

1.9 Implication et équivalence

Considérons les deux propositions suivantes :
A : "x est un réel plus grand que π"
B : "x est un réel positif"
Les deux propositions sont différentes.

La proposition A implique la proposition B. En mathématique, on dispose d'au moins 5 façons de l'écrire :

$A \Longrightarrow B$
A implique B
Si A alors B
A est une condition suffisante pour B
B est vraie si A est vraie

Dans ce cas : A est l'hypothèse B est la conclusion.

Exemple 34 *Si* $\underbrace{[f \text{ est une fonction dérivable}]}_{A}$ *alors* $\underbrace{[f \text{ est continue}]}_{B}$.

Si [x est un réel plus grand que 0*] alors [x est un nombre positif].*

On s'intéresse maintenant à la réciproque. On change le rôle de A et B. Bien sûr formuler la réciproque ne veut pas dire que celle ci est vraie. B peut impliquer A comme elle peut ne pas l'impliquer.

Dans les exemples ci-dessus :
B : "x est un réel positif" implique A :"x est un réel plus grand que 0"
B : "x est un réel positif" n'implique pas A :"x est un réel plus grand que π"

La proposition B implique la proposition A. En mathématique, on dispose d'au moins 5 façons de l'écrire :

$A \Longleftarrow B$
A est impliquée par B
Si B alors A
A est une condition nécessaire pour B
B est vraie seulement si A est vraie

Les termes "nécessaire" et "suffisant" constituent ensemble la phrase "si et seulement si".

Les deux proposition $A \Longrightarrow B$ et $A \Longleftarrow B$ sont complètement différentes et doivent être prouver les deux.

Quand les deux implications sont vraies, on les formules comme suit

$A \Leftrightarrow B$
A est implique B et B implique A
A est équivalente à B
A est une condition nécessaire et suffisante pour B
A est vraie si et seulement si B est vraie

Exemple 35 *A : "n est un entier pair" est équivalente à B : "n est divisible par* 2*".*

1.10 Exercises

1. Pour chacune des questions suivantes, justifier l'inégalité en utilisant l'une des propriétés suivantes : *commutativité*, *associativité*, *élément neutre*, *opposé ou l'inverse*, et *distributivité*.

$2+3=3+2$	$10(\frac{1}{10})=1$	$6+(-6)=0$
$7\cdot 8=8\cdot 7$	$3(4+5)=3\cdot 4+3\cdot 5$	$(17+2)\cdot 4=17\cdot 4+2\cdot 4$
$4+0=4$	$6+(7+8)=(6+7)+8$	$(7+2)+4=7+(2+4)$
$10\cdot(12\cdot 8)=(10\cdot 12)\cdot 8$	$1\cdot(-9)=-9$	$(-3)\cdot(2\cdot 5)=(-3\cdot 2)\cdot 5$
$6\cdot(7+6)=6\cdot 7+6\cdot 6$	$(-3)+3=0$	

2. Comparer les nombres suivants :

$2,4$	$-6,-7$	$-1,2$
$2,-4$	$\sqrt{3},1.7$	$6.2,\sqrt{37}$
$6.2,\sqrt{37}$	$\pi,\dfrac{314}{100}$	$1.4,\sqrt{2}$

3. Définir chacun des ensembles ci-dessous en terme d'inégalité, en terme d'intervalle et enfin en terme de graphe sur la droite des réels.

a. a est inférieur à 8	b. c est plus grand que -4	c. x est entre 4 et 10
d. y entre -5 et 5	e. b est plus grand ou égale à 7	f. a est inférieur ou égale à -2
g. x est positif	h. w est non négatif	i. c est un nombre réel quelconque
j. y est négatif		

4. Calculer

$\sqrt{16}$	$\sqrt[3]{64}$	$36^{1/2}$	$27^{2/3}$	4^5	8^3	$2^{4/2}$
$(-32)^{4/5}$	$(64)^{5/6}$	$(125)^{2/3}$	$4^{5/2}$	$\sqrt{28-19}$	$\sqrt{(-3)^2+4^2}$	$\sqrt{9+7}$

5. Simplifier

$$\left(x^{2n}\right)^5 \qquad x^n x^n \qquad \left(\frac{1}{x}\right)^{-2} \qquad a^{-4}\cdot a^2 \qquad (a^m)^n \qquad \frac{a^{-2}}{a^4}$$

6. Déterminer la ligne 7 du Triangle Pascal.
7. Déterminer la ligne 8 du Triangle Pascal.
8. Déterminer la ligne 9 du Triangle Pascal.
9. Déterminer la ligne 10 du Triangle Pascal.
10. En utilisant le triangle de Pascal développer les quantités suivantes :

$(x+4)^2$	$(x+2)^4$	$(x+y)^8$	$(p+3)^5$	$(2+y)^4$
$(a+c)^3$	$(2+1)^5$	$(x+1)^{10}$	$(2x+1)^4$	$(z+7)^3$

11. Résoudre les inégalités suivantes :

$x-3>0$	$x-7<0$	$2x+4\leq 6$	$3x+1\leq -1$	$2x-6>5$
$4x-7>-3$	$-x+6\leq 7$	$-x-5\leq -4$	$-3x+6<4$	$-6x-3\geq 3$

12. Résoudre les inégalités suivantes :

$1<x+2<6$	$-4<x-3<7$	$3<2x+1\leq 7$	$5<3x-1\leq 11$
$6>5x+1>0$	$3\leq -4x+2\leq 12$	$3\leq -6x-3\leq 4$	$4>2x-4\geq 0$

13. Résoudre les inégalités suivantes :

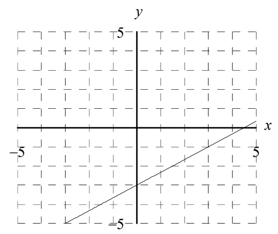
$\lvert x+1\rvert<2$	$\lvert x-1\rvert<3$	$\lvert 2x+1\rvert\leq 1$	$\lvert 2x-1\rvert\leq 4$	$\lvert 3x+1\rvert>2$
$\lvert -2x+1\rvert>0$	$\lvert 4x+7\rvert<23$	$\lvert 7-x\rvert<9$	$\lvert 2-3x\rvert\leq 5$	$\lvert 3-x\rvert\leq 6$

14. Pour chaque question, déterminer pour quelles valeurs de x l'expression est positive et pour quelles valeurs x elle est négative.

x^2-x-2	x^2-1	x^2-6x+5	x^2-x-12	$2x^2-3x-2$
$-x^2+1$	$\dfrac{x-3}{x+3}$	$\dfrac{x+5}{2-x}$	$(x^2-1)(x-2)$	$(x^2-4)(2x+3)$

15. Quelle est la pente de la droite passant par les points $(1,6)$ et $(3,-2)$?
16. En quel point la droite d'équation $-4x+5y=7$ coupe l'axe Ox ?
17. Quelle est la pente de la droite d'équation $6x+4y=1$?

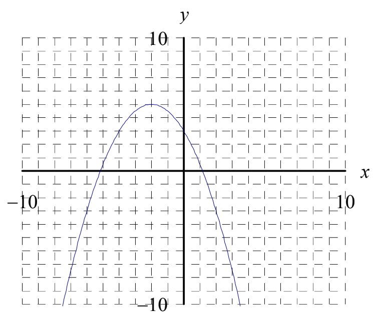
18. Déterminer l'équation de la droite suivante :



19. Soit $f(x) = 3x - 1$. Déterminer l'équation et la pente des droites suivantes :
a. $y = f(x+2)$; **b**. $y = f(x) + 2$; **c**. $y = 2f(x)$.
20. On considère la fonction définie par $v(t) = 1 + 2t$.
    (a) Tracer le graphe de v ;
    (b) En utilisant des considérations géométriques, déterminer l'aire $f(t)$ de la surface entre 0 et t (t est arbitrair**e**) ;
    (c) Sachant que $v(t)$ représente la vitesse d'un objet, donner l'interprétation physique de la fonction $f(t)$.
21. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

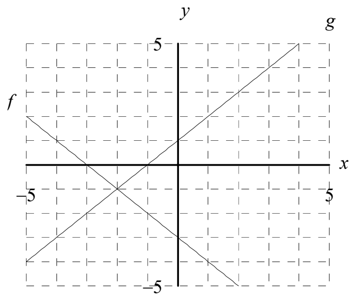
$$\begin{cases} -2x & -y & = & 5 \\ 2x & -y & = & 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ x & +3y & +3z & = & 0 \\ x & +3y & +5z & = & 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x & +2y & +2z & = & 1 \\ 2x & +7y & +7z & = & 0 \\ \frac{1}{2}x & +5y & +9z & = & -1 \end{cases}$$

Donner une interprétation géométrique à ces solutions ?
22. La figure suivante représente le graphe d'une parabole.



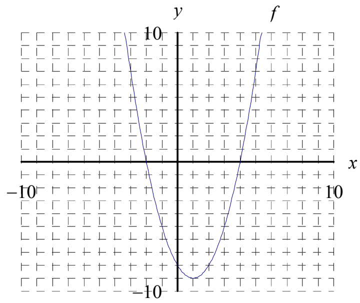
Si l'équation de cette parabole est $y = ax^2 + bx + c$, alors
    (a) $-\dfrac{b}{2a}$ est égale à $\cdots$
    (b) $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ est égale à $\cdots$
23. La parabole d'équation $y = x^2 - 6x + 3$ coupe l'axe des x en $\cdots$
24. Quel est le reste de la division de $x^2 - 7x + 6$ par $x - 4$? (Indication : $x^2 - 7x + 6 = (x-4)(\cdots) + ?$)
25. Sachant que 2 est une racine de $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, déterminer les autres racines. (N.B. des fois au lieu de dire racine d'une équation, on dit zéro de l'équation)
26. Si $a > 0$, alors $|x| < a$ est équivalent à $\cdots$

27. Considérons les graphes des fonctions f et g suivants :



Déterminer l'ensemble des réels tels que $f(x) > g(x)$?

28. Considérons le graphe de la fonction f suivant :



Déterminer l'ensemble sur lequel on a $f(x) \geq 0$?

29. Un des facteur de $x^3 - 5x^2 - 9x + 45$ est **a**. $x - 9$ **b**. $3x - 3$ **c**. $x + 4$ **d**. $x + \frac{5}{9}$ **e**. $x - 5$?
30. Si $a < 0$, combien de solutions réelles l'équation $x^2 = a$ a-t-elle ?
31. Si $a > 0$ et $y^2 = a$, alors $y = \cdots$
32. Simplifier $\dfrac{12 + 2\sqrt{18}}{3}$.
33. Si $x < 0$, alors $|x|$ est égale à $\cdots$